

Ivanor Nunes de Oliveira
José Lourenço Cindra
(organizador)
Clênia Andrade Oliveira de Melo
(organizadora)

MANUAL DE ELETRICIDADE E MAGNETISMO





UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA (UESB)



Reitor

Prof. Dr. Luiz Otávio de Magalhães

Vice-Reitor

Prof. Dr. Marcos Henrique Fernandes

Pró-Reitora de Extensão e Assuntos Comunitários (PROEX)

Profª Drª Gleide Magali Lemos Pinheiro

Diretor da Edições UESB

Cássio Marcílio Matos Santos

Editor

Yuri Chaves Souza Lima

COMITÊ EDITORIAL

Presidente

Profª Drª Gleide Magali Lemos Pinheiro (PROEX)

Representantes dos Departamentos/Áreas de Conhecimento

Profª Drª Adriana Dias Cardoso (DFZ)

Profª Drª Alba Benemerita Alves Vilela (DS II)

Prof. Dr. Prof. Cezar Augusto Casotti (DS 1)

Prof. Me. Érico Rodrigo Mineiro Pereira (DCSA)

Prof. Dr. Flávio Antônio Fernandes Reis (DELL)

Prof. Dr. José Rubens Mascarenhas de Almeida (DH)

Prof. Dr. Luciano Brito Rodrigues (DTRA)

Prof. Dr. Manoel Antonio Oliveira Araújo (DCSA)

Representantes da Edições UESB

Esp. Cássio Marcílio Matos Santos (Diretor)

Esp. Yuri Chaves Souza Lima (Editor)

Adm. Jacinto Braz David Filho (Revisor)

Dr. Natalino Perovano Filho (Portal de Periódicos)

PRODUÇÃO EDITORIAL

Normalização Técnica e Editoração Eletrônica

Jacinto Braz David Filho

Capa

Arte gráfica: Warley Souza dos Reis

Revisão de linguagem

José Lourenço Cindra

**Ivanor Nunes de Oliveira
José Lourenço Cindra
Clênia Andrade Oliveira de Melo
(Organizadores)**

MANUAL DE ELETRICIDADE E MAGNETISMO



Vitória da Conquista – BA
2022

Copyright © 2022 by Autor e Organizadores.
Todos os direitos desta edição são reservados a Edições UESB.
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte,
constitui violação de direitos autorais (Lei 9.610/98).

E-book selecionado e custeado conforme e com recursos do
Edital UESB Nº 123/2019 – Da Publicação de Livros Técnico-Científicos.

M294

Manual de eletricidade e magnetismo. / Autor e Organizadores: Ivanor Nunes de Oliveira, José Lourenço Cindra, Clênia Andrade Oliveira de Melo. - - Vitória da Conquista: Edições UESB, 2022.

220 p.

eISBN 978-65-87106-44-1

1. Eletricidade. 2. Magnetismo. 3. Circuitos elétricos. I. Oliveira, Ivanor Nunes de. II. Cindra, José Lourenço. III. Melo, Clênia Andrade Oliveira de.

CDD: 530

Catálogo na fonte: Juliana Teixeira de Assunção – CRB 5/1890
Biblioteca Universitária Professor Antonio de Moura Pereira
UESB – Campus de Vitória da Conquista

Editora filiada à:



Campus Universitário – Caixa Postal 95 – Fone: 77 3424-8716
Estrada do Bem-Querer, s/n – Módulo da Biblioteca, 1º andar
45031-900 – Vitória da Conquista – Bahia
www2.uesb.br/editora – E-mail: edicoesuesb@uesb.edu.br

DEDICATÓRIA

Esta obra foi idealizada e almejada pelo professor Ivanor; poderá ser muito útil para os estudantes das áreas de engenharia e física. O professor Ivanor foi uma pessoa dotada de grande senso de justiça, defensor da paz e do progresso social, um profissional dedicado, um colega de fácil convivência e um amigo de boas e longas conversas.

Por isso ela é totalmente dedicada à sua memória.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos organizadores, aos pareceristas e a todos das Edições UESB pelas contribuições que proporcionaram um melhoramento no projeto inicial deste livro.

Para o coração a vida é simples: ele bate enquanto puder. E então para (KNAUSGÅRD, 2015).

SUMÁRIO

Sobre o Autor e Organizadores.....	9
Apresentação.....	10
Capítulo 1 – Interação eletromagnética.....	12
Capítulo 2 – Indução. Linhas de força. Teorema de Gauss-Ostrogradsky.....	26
Capítulo 3 – Energia das cargas num campo eletrostático. Potencial.....	39
Capítulo 4 – Trabalho num campo de forças potenciais – Capacitância elétrica.....	50
Capítulo 5 – Os dielétricos no campo elétrico.....	60
Capítulo 6 – Corrente elétrica contínua. Lei de Ohm.....	69
Capítulo 7 – Circuitos elétricos complexos. Regras de Kirchhoff.....	79
Capítulo 8 – Lei de Joule-Lenz. Rendimento de uma fonte de corrente. Natureza eletrônica da condutividade dos metais.....	89
Capítulo 9 – Teoria clássica da condutividade elétrica dos metais.....	97
Capítulo 10 – Campo magnético da corrente elétrica.....	104
Capítulo 11 – Lei de Ampère. Lei de Biot e Savart.....	112
Capítulo 12 – Aplicações e consequências da Lei de Biot e Savart.....	120
Capítulo 13 – Momentos magnéticos dos átomos e moléculas. Condições de contorno para os vetores do campo magnético.....	130
Capítulo 14 – Movimento das partículas carregadas num campo magnético.....	139
Capítulo 15 – Lei da indução eletromagnética.....	145
Capítulo 16 – Auto-indução.....	153
Capítulo 17 – Consequências da lei da indução eletromagnética.....	161
Capítulo 18 – Corrente alternada.....	169
Capítulo 19 – Equações de Maxwell.....	177
Capítulo 20 – Oscilações livres não-amortecidas e amortecidas num circuito. Fator de qualidade de um circuito elétrico oscilatório.....	185
Capítulo 21 – Oscilações forçadas.....	192
Capítulo 22 – Ondas eletromagnéticas e sua energia.....	200
Referências.....	209
Apêndices.....	211

SOBRE O AUTOR E ORGANIZADORES

IVANOR NUNES DE OLIVEIRA

Possui graduação em Bacharelado em Física pela Universidade da Amizade dos Povos “Patrice Lumumba” (1976), mestrado em Física pela Universidade da Amizade dos Povos “Patrice Lumumba” (1978) e doutorado em Ciências Físico-Matemáticas pela Universidade Russa da Amizade dos Povos “Patrice Lumumba” (1995). Atuou como professor titular nível b da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Tem experiência na área de Física, com ênfase em Física do Plasma, Estudo de propriedades óptico-físicas de micropartículas em regime de levitação acústica, atuando principalmente nas seguintes linhas de pesquisa e desenvolvimento: Automatização de experimentos laboratoriais de Física Geral, Experimentos demonstrativos de física para a escola de ensino médio e Experimentos demonstrativos de Física Geral com o uso da Informática;

JOSÉ LOURENÇO CINDRA

Possui graduação em Bacharelado Em Física pela Universidade da Amizade dos Povos “Patrice Lumumba” (1979) e doutorado em Física pela Universidade da Amizade dos Povos “Patrice Lumumba” (1989). Atualmente é Professor Assistente Doutor na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Guaratinguetá, SP. Tem experiência na área de Física, com ênfase em Relatividade Geral e Gravitação, atuando principalmente nos seguintes temas: Ensino de Física Geral, História da Ciência, Mecânica Clássica e Relatividade Geral.

CLÊNIA ANDRADE OLIVEIRA DE MELO

Possui graduação em Licenciatura Plena em Ciências com Habilitação em Matemática pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (1995), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (2004) e Doutorado em Engenharia Industrial pela Universidade Federal da Bahia (2018). Professora Adjunta (DE) da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), onde atua na área de Matemática.

APRESENTAÇÃO

Já temos no mercado editorial brasileiro alguns bons livros de Física, para os diversos níveis de ensino. Temos livros que enfocam o assunto em um nível mais elementar e com poucas exigências matemáticas, até livros com maior rigor conceitual e matemático. Os livros de Tipler e Halliday e Resnick podem ser considerados do primeiro tipo, enquanto os livros de Física Básica de Moysés Nussenzveig são livros que se enquadram no segundo tipo. Podemos, então, perguntar: por que mais um livro de Física, especificamente sobre eletricidade e magnetismo? O *Manual de Eletricidade e Magnetismo*, pela sua estrutura, trata-se de uma obra em que procuramos apresentar uma boa fundamentação teórica de cada tópico estudado, como também procuramos não descuidar do enfoque matemático, sempre na medida do que mostrou ser necessário. Já de longa data se sabe que o eletromagnetismo é um ramo da ciência que exige uma abordagem matemática relativamente profunda. Entretanto, nem sempre foi assim. Nos primórdios dos estudos dos fenômenos elétricos e magnéticos havia a impressão que se tratava de uma “ciência fácil”, muito longe das complicações matemáticas inerentes às ciências mais desenvolvidas até aquela época: a mecânica dos corpos terrestres, a mecânica celeste e a óptica geométrica. Isso foi verdadeiro, basicamente, só até o final do século XVIII, quando eram conhecidas apenas a eletrostática e a magnetostática. Com a invenção da pilha por Alessandro Volta em 1800, e duas décadas depois, com a descoberta de Oersted da interação entre uma bússola e um fio retilíneo com corrente contínua, a situação estava preparada para o surgimento da eletrodinâmica (eletromagnetismo). Desde então, a ciência dos fenômenos eletromagnéticos avançou muito e suas complicações matemáticas evoluíram na mesma proporção.

Este livro, contendo vinte e dois capítulos e quatro apêndices, destina-se, em primeiro lugar, aos estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática, Biologia e dos cursos técnico-científicos, em geral.

Alguns trechos dos capítulos, nos quais se aplicam os métodos de análise vetorial, podem ser omitidos, sem prejudicar a compreensão do conteúdo e das conclusões finais. Procuramos dar bastante ênfase à questão do magnetismo nos meios materiais, quando a distinção entre os campos $\vec{B}$ e $\vec{H}$ se faz

presente, como também a polarização dos dielétricos, onde o vetor deslocamento $\vec{D}$ tem importância fundamental. Uma característica marcante de nosso enfoque foi apresentar muitos resultados no sistema de unidade CGS (Sistema Gaussiano CGSE, para a eletricidade e Sistema Gaussiano CGSM, para o magnetismo) ao lado de resultados apresentados no Sistema Internacional (SI). Não resta dúvida que este último é mais usado nos livros didáticos atuais. Entretanto, também não resta dúvida que é bom que o aluno tenha conhecimento do sistema CGS, até porque muitos artigos científicos e alguns livros mais antigos são apresentados nesse sistema de unidade. Além disso, o sistema CGS é comumente empregado em física atômica. Entretanto, não resta dúvida que a unidade assim definida é muito pequena para as aplicações práticas, particularmente, nos problemas de engenharia. Para expressar grandezas físicas em potências de base dez, optamos pelo uso de um ponto indicando a multiplicação do coeficiente pela potência de base dez, em vez de usar um X, que é de uso mais geral na literatura contemporânea.

Na sua plenitude, o manual pode também ser recomendado aos estudantes do Curso de Licenciatura em Física. Nesse sentido, a orientação do curso está em consonância com algumas exigências indicadas para uma boa formação de professores de Física, sendo que uma delas é a superação das abordagens fragmentadas, muitas vezes presentes nos cursos de Matemática e de Ciências da Natureza.

O objetivo principal que se quer atingir com este manual é, antes de tudo, é o de dar aos estudantes uma compreensão mais clara das ideias fundamentais, dos conceitos e dos métodos empregados na ciência do eletromagnetismo, assim como elucidar o sentido físico das leis já estabelecidas e propiciar que eles aprendam a fazer sua aplicação consciente, quando da resolução de problemas específicos.

Os leitores, que desejarem ampliar ainda mais os seus conhecimentos sobre temas tratados neste *Manual de Eletricidade e Magnetismo*, poderão consultar, entre outros, os livros citados nas referências bibliográficas, que se encontra no fim do manual. Por exemplo, para aprofundar no estudo de circuitos elétricos, indicamos o livro de Charles K. Alexander e Matthew N. O. Sadiku (2013), principalmente os capítulos 1 e 2, que apresentam um resumo da teoria e muitos exercícios resolvidos ou para o aluno resolver. Para adquirir noções úteis da análise vetorial, o primeiro capítulo do livro de Matthew Sadiku: *Elementos de Eletromagnetismo* (2012), e também o primeiro capítulo da *Eletrodinâmica* de David J. Griffiths (2011), são bastante adequados. Para os que desejarem adquirir maiores conhecimentos no tocante à história do eletromagnetismo, indicamos os livros de Malcolm Longair e de Whittaker, sendo que o livro de Longair não é propriamente um livro de história do assunto, mas um livro que apresenta uma abordagem conceitual dos fundamentos da física clássica, com ênfase nos seus aspectos históricos. No que concerne ao eletromagnetismo, esse assunto é tratado nos capítulos 5 e 6. Já o livro de Whittaker está voltado exclusivamente para a história do eletromagnetismo.

CAPÍTULO 1

INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA

São conhecidos quatro tipos de forças ou interações fundamentais na natureza: em ordem decrescente de intensidade, elas são a força nuclear forte, a eletromagnética, a nuclear fraca e a interação gravitacional. A força nuclear forte e a nuclear fraca são forças de pequeno alcance, enquanto a força eletromagnética e a gravitacional são forças de longo alcance. A interação nuclear forte mantém os prótons e neutros unidos nos núcleos dos átomos. A interação nuclear fraca é responsável pelo decaimento de algumas partículas elementares. De um ponto de vista fundamental, a interação eletromagnética é a que compreendemos melhor. E, além disso, ela está presente nos mais diversos fenômenos que se manifestam a nível atômico-molecular. Na mecânica geral básica, a causa das mudanças no movimento dos corpos é atribuída à grandeza força. Entretanto, quando passamos da mecânica básica para um nível mais avançado, é comum dar preferência a uma descrição do movimento que dispensa o conceito de força. É o caso das abordagens lagrangiana e hamiltoniana da mecânica, que usam largamente os conceitos de energia e momento, enquanto o conceito de força fica relegado a um segundo plano.

No tocante ao eletromagnetismo, algo semelhante ocorreu. A lei de Coulomb é uma lei de força entre cargas pontuais. Ampère e outros físicos de meados do século XIX, em particular, os físicos alemães Wilhelm Weber e Carl Neumann ainda produziram resultados relevantes nas pesquisas em eletricidade e o magnetismo, no espírito das forças centrais agindo à distância. Mas a tendência posterior, começando com a grande síntese de Maxwell, que teve como inspiração a concepção de linhas de forças de Faraday, foi o conceito de força central de atração e repulsão entre partículas distantes perder sua primazia, enquanto o conceito de campo, agindo localmente, foi adquirindo cada vez mais importância, para a abordagem dos fenômenos eletromagnéticos.

Explorando o mundo que nos rodeia, deparamo-nos com uma grande variedade de forças de interação entre os corpos: a força gravitacional, a força da elasticidade de uma mola, a força gerada pela colisão de corpos, a força normal, a força de atrito e outras. No entanto, quando a estrutura atômica da substância foi, aos poucos, sendo descoberta, tornou-se claro que a diversidade dessas

forças é o resultado da interação dos átomos entre si. Como os átomos se interagem através do campo eletrostático das camadas de elétrons, constatou-se que todas estas forças são apenas diferentes manifestações da interação eletromagnética. A única exceção a esta variedade de forças é a gravidade, causada pela interação gravitacional entre dois corpos maciços. Qual é, pois, a natureza, qual é a origem de outras forças existentes ao lado da força gravitacional?

No século XVII, o conceito de gravitação universal e o estudo dos fenômenos celestes, com base nesse conceito tiveram início a partir das atividades do físico e matemático inglês, Isaac Newton (1643-1727). A mecânica newtoniana teve grande importância para o estudo dos movimentos terrestres e para a compreensão dos movimentos celestes. No decorrer dos séculos XVIII e XIX, foram feitas as mais variadas descobertas e pesquisas das leis fundamentais de outro tipo básico de interação entre os corpos, a interação eletromagnética. Em um nível ainda muito elementar, os fenômenos da eletricidade e do magnetismo eram conhecidos já nos tempos da Grécia antiga, mas o surgimento da ciência sobre esses fenômenos, pode se relacionar somente com a época das grandes descobertas realizadas por Aepinus, Coulomb, Lomonossov, Oersted, Ampère, Ohm, Kirchhoff, Faraday, Maxwell, e outros cientistas.

O século XX ficou conhecido como sendo o período em que a ciência penetrou nas profundezas do átomo, avançando até o estudo do interior das partículas elementares da matéria, e esse mundo constituído de objetos microscópicos revelou-se como portador de novos tipos de interações, as forças nucleares, responsáveis pelos movimentos da matéria no nível microscópio subatômico.

Entretanto, este livro trata exclusivamente das interações eletromagnéticas.

Assim como acontece com o estudo dos fenômenos relacionados com a gravitação, as forças elétricas e magnéticas são estudadas como propriedades fundamentais da matéria, que não podem ser reduzidas a outras propriedades mais gerais, mais universais da matéria. Estas forças são interações que têm uma natureza objetiva, elas são vistas como sendo inerentes ao mundo que nos circunda. Consideramos que é nossa tarefa estudá-las, de modo cada vez mais abrangente e profundo, para sua utilização no progresso técnico-científico, para o desenvolvimento da sociedade e, em última análise, para o bem da humanidade, pelo menos, assim é desejável.

Quais são, pois, as propriedades fundamentais das interações eletromagnéticas? Recordemos as experiências conhecidas já no tempo da Grécia antiga. Uma porção de âmbar (o âmbar é uma resina orgânica fóssil de cor amarelada), quando atritado com pele de animais, ele passa a ter a propriedade de atrair pequenos corpos, como pedaços de papel, por exemplo. O nome âmbar, no grego antigo, era *elektron*: eis a origem do vocábulo “eletricidade” e do nome da partícula subatômica, o “elétron”. Também foi constatado que quando dois pedaços de âmbar eletrizados se aproximavam mutuamente eles eram repelidos. É atribuída a Tales de Mileto (c.625 – c.545 a.C.) a descoberta dessas propriedades do âmbar. Os fenômenos magnéticos eram também conhecidos desde a Grécia antiga. A palavra “magnético” vem de Magnésia, região da Grécia, onde eram encontrados fragmentos de minério de ferro imantados, exibindo as propriedades típicas do ferromagnetismo. Acredita-se que por

volta de 200 a.C. a bússola tenha sido inventada na China. Mas ela só foi utilizada como instrumento de navegação pelos chineses a partir de 1050 da nossa era. Por volta de 1300, a bússola passou a ser conhecida na Europa. Em 1600, William Gilbert (1544-1603), que era médico da rainha da Inglaterra, Elisabeth I, publicou em latim um livro sobre fenômenos elétricos e magnéticos, que na época se tornou famoso. O livro trazia o título de *De magnete magneticisque corporibus et magno magnete tellure* (Sobre o imã e os corpos magnéticos, e sobre o grande imã, a Terra). Gilbert notou que não só o âmbar, mas uma série de outras substâncias podiam adquirir as propriedades de atrair outros corpos neutros. Ele chegou, além disso, à conclusão de que a Terra se comportava como se fosse um grande imã. Esta seria a explicação para o comportamento da bússola, que sempre se alinhava na direção norte-sul. O estudo dos fenômenos eletrostáticos se desenvolveram bastante ao longo do século XVII e início do século XVIII. O fenômeno da condutividade elétrica foi observado pelo físico e astrônomo amador inglês, Stephen Gray (1666-1736), por volta de 1729. Ele percebeu que, por intermédio de um condutor, a eletricidade podia passar de um corpo eletrizado para outro. Todavia, muita coisa estava ainda para ser descoberta. Charles François du Fay (1698-1739), químico, que também era o intendente dos jardins do rei da França em Versailles, se interessou pelos trabalhos de Stephen Gray e outros pesquisadores dos fenômenos elétricos. Foi assim que ele pôde concluir em 1733 que quando duas porções de âmbar eram eletrizadas por atrito com um pedaço de seda, elas repeliam-se, mas o vidro eletrizado atraía o âmbar igualmente eletrizado. Com essas experiências, ele pôde concluir que deveriam existir duas espécies de eletricidade: a eletricidade vítrea, típica do vidro e a resinosa, típica das resinas. Se um pedaço de seda entrar em contato com as superfícies de duas bolas de cortiças, então elas vão se interagir agora com uma força de repulsão. Se uma das esferas entrar em contato com um bastão de vidro e a outra com um bastão de ebonite, então a interação destas se manifestará como atração de uma pela outra. Nisto consiste a importante diferença das forças gravitacionais que produzem somente a atração de corpos entre si. Assim podemos dizer que o fenômeno da repulsão eletrostática, pela primeira vez, foi observado e analisado por Du Fay.

As experiências que acabamos de descrever permitem fazer uma série de conclusões. Em primeiro lugar, existe um estado especial dos corpos, que chamamos de eletrização (da palavra grega “elétron” que significa o âmbar, no qual, pela primeira vez, foram observadas as propriedades descritas), que se caracteriza ou pela atração ou pela repulsão dos corpos um pelo outro. Em segundo lugar, os corpos podem ser eletrizados como resultado do contato. Em terceiro lugar, as forças de atração ou repulsão podem ser medidas e, conseqüentemente, pode ser estabelecida a dependência quantitativa destas forças da distância entre os corpos em interação e o grau de eletrização.

Para caracterizar o grau de eletrização, utiliza-se o conceito de carga que é comunicada ao corpo por contato. Como as interações dos corpos, de acordo com a sua eletrização, podem ser diferentes, ou seja, pode surgir atração ou repulsão, no estudo dos fenômenos elétricos tornou-se necessário introduzir o conceito de dois tipos de cargas. Por uma questão de convenção, elas receberam as denominações de cargas positiva e negativa (bastão de vidro e bastão de ebonite, respectivamente). A generalização dos dados experimentais resultou na formulação de uma das concepções fundamentais

no tocante aos fenômenos elétricos: cargas de mesmo sinal repelem-se e cargas de sinais diferentes atraem-se (regra de du Fay).

Em meados do século XVIII, o polímata Benjamin Franklin (1706-1790), político, diplomata e cientista estadunidense, fez algumas experiências interessantes sobre os fenômenos elétricos, constatando a natureza elétrica dos raios durante as tempestades. Ele foi provavelmente um dos primeiros a chamar as eletricidades vítrea e resinosa de Du Fay de eletricidades positiva e negativa, respectivamente. Ele chegou também a conceber o princípio de conservação das cargas elétricas. Na Rússia, outro polímata, Mikhail Lomonossov (1711-1765), enciclopedista, criador da primeira gramática do idioma russo, estudioso de química e meteorologia, chegou a fazer alguns experimentos com eletricidade atmosférica, semelhante aos de Benjamin Franklin. Os estudos de Lomonossov sobre eletricidade foram continuados por Franz Aepinus (1724-1802). Aepinus foi, durante um curto período tempo, diretor do Observatório Astronômico em Berlim, mas em seguida mudou-se para San Petersburgo, na Rússia. Ele defendia a concepção de que as interações eletrostáticas deveriam satisfazer a lei do inverso do quadrado da distância.

Assim terminava a fase inicial do estudo dos fenômenos da eletricidade e do magnetismo. Era a fase de predomínio das pesquisas qualitativas. A eletricidade era vista como um fenômeno curioso, que provocava admiração e às vezes espanto. Depois da descoberta da “garrafa de Leiden”, as exhibições desses fenômenos eram comuns nos salões da nobreza parisiense. A fase seguinte, é quando as interações elétricas passaram a ser medidas. Era o início das pesquisas quantitativas, ou melhor, qualitativas e quantitativas. A qualidade e a quantidade são categorias correlacionadas.

Medições precisas das forças de interação entre cargas foram feitas com o emprego da balança de torção (de forma análoga à realizada por Cavendish em relação à gravitação), que permitiram, ainda no século XVIII, estabelecer a lei fundamental de interação entre cargas elétricas. Essa lei entrou para a ciência com o nome de Lei de Coulomb, em homenagem ao engenheiro e físico francês, Charles Augustin Coulomb (1736-1806), que por meio de uma série de experimentos realizados entre 1785 e 1789 pôde estabelecer a lei de interação entre cargas elétricas puntiformes, separadas por uma distância r .

“A força de interação entre cargas pontuais, q_1 e q_2 , é inversamente proporcional ao quadrado da distância (r^2) entre elas e diretamente proporcional aos valores das cargas, está orientada ao longo da linha reta que une essas cargas e depende do meio onde essas cargas estão inseridas”.

Consequentemente, a lei de Coulomb permite estabelecer a unidade de carga, pois, as unidades de força e de distância são por nós conhecidas, e a influência do meio pode ser considerada como um fator que mostra quantas vezes a força de interação entre as cargas pontuais é menor do que seria no vácuo. Chamamos a atenção para o fato de que a definição de carga pontual coincide com aquela definição utilizada na mecânica e na física molecular, ou seja; tem-se em conta a insignificância relativa das dimensões dos corpos em comparação com as distâncias entre eles. Finalmente, podemos escrever a expressão matemática da lei formulada acima, que é a expressão da lei de Coulomb.

Para facilitar a introdução de um sistema de unidades práticas, vamos considerar a proporcionalidade inversa entre a força de interação e o quadrado da distância como uma proporcionalidade inversa entre a força e a área da superfície da esfera cujo raio é a distância r .

Então, a lei de Coulomb será expressa, analiticamente, pela fórmula:

$$\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2} \cdot \vec{r}_0, \quad (1.1)$$

onde, $\vec{r}_0$ é um vetor unitário que tem a direção da linha que une as cargas pontuais; ε' é a grandeza que caracteriza a influência da ação do meio ambiente no valor da força de interação entre as cargas. Esta grandeza tem o nome de permissividade dielétrica absoluta da substância. Ressaltamos que a lei do inverso do quadrado em (1.1) já havia sido inferida em 1766, por Joseph Priestley, um dos descobridores do elemento químico oxigênio.

Simbolizando a grandeza ε' , para o vácuo, por ε_0 , podemos introduzir a permissividade dielétrica relativa.

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}. \quad (1.2)$$

ou seja, $\varepsilon' = \varepsilon_0 \varepsilon$. Geralmente, nos compêndios de física é justamente esta grandeza ε que é dada. Desta maneira, temos, por exemplo, para o vidro $\varepsilon = 5$, para o ar $\varepsilon = 1,0006$, para a ebonite $\varepsilon = 3$. Então, para determinar F é preciso conhecer ε' . Vamos agora procurar esta grandeza.

Aqui, vamos deparar com uma dificuldade decorrente da existência de vários sistemas de unidades: CGS, SI, MKS, e outros. Esta dificuldade surgiu no processo histórico. De fato, ela cria certo obstáculo nos cálculos dos fenômenos elétricos e magnéticos, mas eliminá-la, infelizmente, é impossível, pois ela está associada ao sistema de unidades utilizado.

A unidade de carga no sistema CGS (que aplicada à eletricidade, vamos chamar CGSE) define-se, naturalmente, como a carga que atua em uma carga igual a esta no vácuo, localizada à distância de 1 cm, com uma força de um dina. A permissividade dielétrica do vácuo neste sistema torna-se igual à unidade ($\varepsilon_0 = 1$).

No sistema CGS, a Lei de Coulomb toma a seguinte forma:

$$F(dina) = \frac{q_1(CGSE)q_2(CGSE)}{r^2(cm)}.$$

No sentido prático, como unidade de carga no sistema SI, aceito agora na qualidade de Sistema Internacional, toma-se a grandeza igual a $3 \cdot 10^9$ unidades CGSE, chamada coulomb (C). Introduzindo

esta grandeza e expressando todas as outras grandezas no sistema SI, com o auxílio da fórmula (1.1), podemos encontrar o valor de ε_0 :

$$10^{-5}(N) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\frac{1}{3 \cdot 10^9} (C) \frac{1}{3 \cdot 10^9} (C)}{4\pi \left(\frac{1}{100}\right)^2 (m^2)}. \quad (1.3)$$

Consequentemente,

$$10^{-5} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{100^2}{4\pi (3 \cdot 10^9)^2}, \quad (1.4)$$

isto é,

$$\varepsilon_0 = \frac{10^5 \cdot 10^4}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{18}} = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}, \quad (1.5)$$

ou

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}. \quad (1.6)$$

Não é difícil encontrar também a dimensão desta grandeza:

$$[\varepsilon_0] = \frac{C^2}{N \cdot m^2}. \quad (1.7)$$

Desta maneira, expressando a permissividade dielétrica do meio por intermédio da grandeza adimensional ε , para encontrar a força em Newtons, na fórmula (1.1) é preciso colocar a grandeza $\varepsilon' = 8,85 \cdot 10^{-12} \varepsilon$, expressar q_1 e q_2 em coulombs e r em metros.

A lei de Coulomb (1.1) pode ser representada na forma seguinte

$$\vec{F} = K_e \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} \vec{r}_0, \quad (1.8)$$

onde o coeficiente de proporcionalidade K_e depende da escolha das unidades de medida. No sistema SI, K_e denomina-se constante de Coulomb e é igual a

$$K_e = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} = 8,9874 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}. \quad (1.9)$$

Na prática, podemos usar $K_e = 9.10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$. No sistema CGSE, por definição, $K_e = 1$.

Isso significa que duas cargas de 1 coulomb cada, separadas por uma distância de 1 metro interagem com uma força de aproximadamente $9.10^9 N$. Não resta dúvida que, para todos fins práticos, a unidade de carga coulomb é muito grande.

A lei de Coulomb satisfaz o princípio de superposição. A força com que duas cargas interagem não se altera em presença de uma terceira carga. Quando várias cargas eletrostáticas interagem entre si, a força resultante sobre cada carga do sistema é a soma vetorial das forças oriundas das demais cargas sobre ela.

$$\vec{F}_i = q_i \sum_j \frac{q_j}{(r_{ij})^2} \vec{e}_{ij}, \quad (1.10)$$

onde $\vec{e}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$ são vetores unitários orientados ao longo das retas que unem as cargas q_j à carga q_i , $j \neq i$.

De forma análoga ao fenômeno da gravitação, as interações elétricas entre os corpos são caracterizadas por um campo de forças existente em torno do corpo eletrizado. Cada ponto do espaço em volta deste corpo eletrizado é caracterizado por uma grandeza física determinada e pela direção da força, ou seja, por um vetor força que atua em uma carga pontual positiva, inserida nesse ponto.

Da fórmula (1.1) segue que a força que age sobre uma carga de prova q_2 depende não só das grandezas que determinam o campo (de q_1 e de r), mas também do valor da carga de prova q_2 . Se forem tomadas cargas de prova de diferentes valores, então as forças que nelas atuam em dado ponto do campo serão diferentes. Contudo, de (1.1) resulta que a razão $\frac{\vec{F}}{q_2}$ para todas as cargas de prova será a mesma e depende apenas dos valores de q_1 e de r .

$$\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \frac{q}{4\pi r^2} \vec{r}_0 = K_e \frac{q}{\epsilon r^2} \vec{r}_0.$$

A rigor, a carga de prova também cria seu próprio campo, então para que a carga de prova indique o campo elétrico criado pelas outras cargas, é preciso que ela seja suficientemente pequena, para que a perturbação criada por ela seja desprezível. A grandeza vetorial, representada por $\vec{E}$, conseqüentemente, caracteriza, quantitativamente, o campo de forças da carga q_1 e se chama intensidade de campo elétrico da carga q_1 (representada abaixo simplesmente por q).

$$\vec{E} = \frac{K_e}{\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0. \quad (1.11)$$

Esta fórmula mostra que, para uma carga pontual positiva, as linhas de força do campo $\vec{E}$ são linhas retas divergentes (Figura 1.1a) e, para uma carga pontual negativa, são convergentes (Figura 1.1b), pois, o sentido positivo de $\vec{r}_0$ corresponde ao sentido do raio de uma esfera, cujo centro coincide com a carga pontual que cria o campo. Logo, uma carga de prova positiva inserida neste campo se distanciará (repulsão), se o campo for criado também por uma carga positiva e se aproximará (atração), quando o campo for criado por uma carga negativa.

Vamos comparar a força elétrica de interação eletrostática (estamos examinando cargas fixas) entre cargas com a força de atração gravitacional.

Examinemos, por exemplo, dois elétrons cujas cargas são a menor grandeza conhecida até agora, ou seja, uma carga elementar que é submúltiplo de todas as outras cargas elétricas. Esta grandeza é simbolizada por e , e a sua carga negativa é igual a $-1,602 \cdot 10^{-19}C$. Em unidades eletrostáticas de carga, a carga do elétron é $-4,8 \cdot 10^{-10}$ unidades.

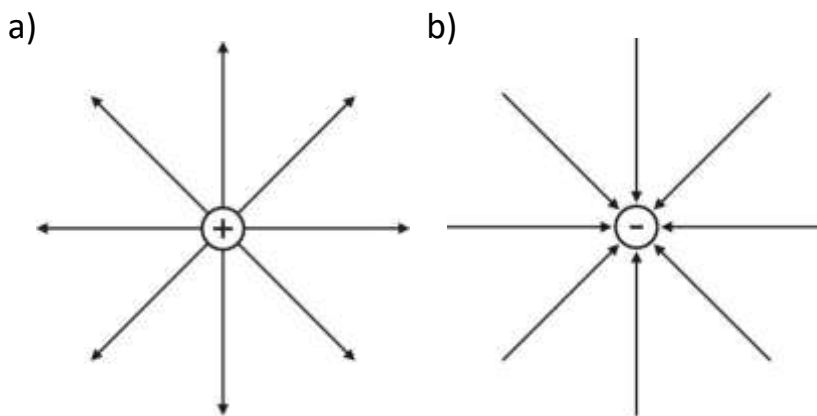


Figura 1.1

Sabe-se que a massa do elétron $m_e = 9,1 \times 10^{-28}g \cong 10^{-30}kg$. Então, em um ponto situado a uma distância r , a atração gravitacional F_g é igual a :

$$F_g = G \frac{m_e^2}{r^2}, \quad (1.12)$$

onde,

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}. \quad (\text{constante gravitacional})$$

A força de repulsão elétrica no vácuo F_e , de acordo com a lei de Coulomb, é igual a:

$$F_e = K_e \frac{e^2}{r^2}.$$

Vamos encontrar a relação entre elas:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K_e e^2 r^2}{G r^2 m_e^2} \approx \frac{4 \cdot 10^{-38}}{10^{-80}} = 4 \cdot 10^{42}$$

Esta grandeza colossal, que mostra quantas vezes a interação eletrostática é mais forte que a gravitacional, acentua a legitimidade de desprezar a força gravitacional, entre corpos microscópicos carregados, na maioria dos cálculos e problemas com eles relacionados.

Com base nos dados experimentais, formulemos as propriedades fundamentais das cargas elétricas:

1. Duas espécies de cargas: existem cargas positivas e negativas;
2. Adição das cargas. As cargas somam-se algebricamente; a carga resultante é igual à soma das cargas isoladas.
3. Conservação. As cargas obedecem à lei da conservação. Nós acrescentamos a lei geral da conservação da carga às leis de conservação conhecidas da mecânica: lei da conservação da energia, conservação do momento linear e conservação do momento angular.
4. Descontinuidade. Existência da menor carga da qual é impossível uma divisão posterior. Verificou-se que o elétron possui tal carga elementar (por exemplo, a carga positiva do próton é igual à carga do elétron em valor absoluto).

A descontinuidade da carga foi estabelecida pelos experimentos precisos do físico estadunidense Robert A. Millikan (1868-1953), realizados em 1909. O esquema da experiência de Millikan é dado na Figura 1.2.

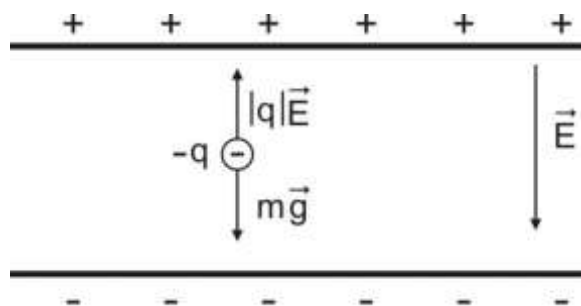


Figura 1.2

Duas placas são carregadas com cargas de sinais contrários (um sistema desse tipo é chamado de capacitor plano). Se entre as placas for inserida uma partícula carregada, então, ela estará em equilíbrio, em estado de suspensão, quando se cumpre a condição:

$$E q = m g, \tag{1.13}$$

onde E é a intensidade do campo no capacitor, q a carga da partícula; m é a sua massa, g é a aceleração da força da gravidade. Millikan criou no ambiente do experimento uma nuvem de pequeníssimas gotículas, uma parte das quais estava carregada. Variando o campo E , Millikan conseguiu equilibrar as gotas que, em geral, possuíam cargas diferentes, mas massas iguais. Assim, foi obtida uma série de igualdades:

$$E_1 q_1 = E_2 q_2 = E_3 q_3 = \dots = E_n q_n$$

De onde, obtemos uma série de proporções correspondentes:

$$\frac{E_i}{E_k} = \frac{q_k}{q_i}. \quad (1.14)$$

Estas proporções mostraram que a grandeza q , em todos os casos, é um múltiplo do número $1,6 \cdot 10^{-19} C$ ou $(4,8 \cdot 10^{-10} CGSE)$.

O conhecimento desta grandeza permite, por exemplo, encontrar a quantidade de elétrons, cuja carga total seria igual a um coulomb (1 C). Este número mostra ser muito grande:

$$n = \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 6,24 \cdot 10^{18}.$$

Mesmo o número de elétrons em uma unidade eletrostática de carga é muito grande, ele é de aproximadamente $2,08 \times 10^9$ eletrons.

A lei de Coulomb nos permite calcular a intensidade de campo de um sistema de cargas pontuais. Por outro lado, não resta dúvida, que o coulomb é uma unidade muito grande, para fins práticos. Vejamos um sistema simples, formado por duas cargas iguais, em valor absoluto, mas de sinais contrários, situadas a uma distância r' uma da outra. Tal sistema é chamado dipolo elétrico. A distância r' tem o nome de braço de dipolo e tem caráter vetorial. Como direção do vetor $\vec{r}'$ toma-se a direção da carga negativa para a carga positiva (Figura 1.3).



Figura 1.3

O produto do valor da carga pelo braço de dipolo é chamado momento de dipolo e simboliza-se pelo vetor $\vec{P}$, logo

$$\vec{P} = q\vec{r}', \quad (1.15)$$

ou seja, a direção do momento de dipolo coincide com a direção do vetor $\vec{r}'$.

Encontremos a intensidade do campo em qualquer ponto (Figura 1.4).

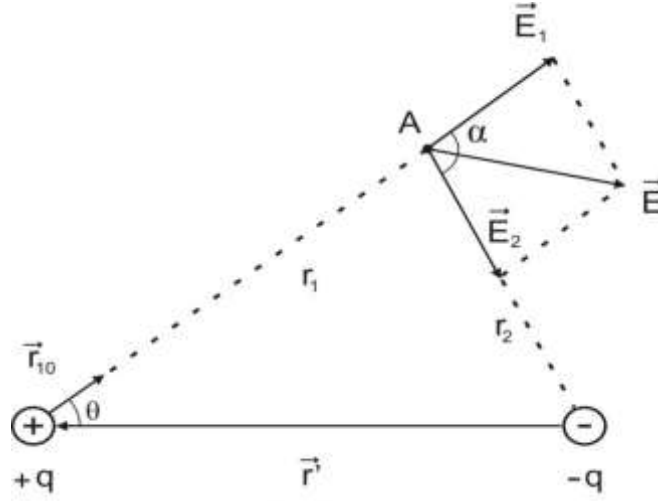


Figura 1.4

Na carga pontual positiva unitária inserida no ponto A atuam dois campos: as intensidades $\vec{E}_1$ e a intensidade $\vec{E}_2$ dos campos das cargas q_1 e q_2 . De acordo com a lei de Coulomb, estas intensidades são calculadas pelas fórmulas:

$$\vec{E}_1 = \frac{K_e (+q)}{\varepsilon r_1^2} \vec{r}_{10}, \quad (1.16)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{K_e (+q)}{\varepsilon r_2^2} \vec{r}_{20}.$$

A soma vetorial $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ é a intensidade de campo $\vec{E}$ procurada.

Se for conhecido o ângulo α entre $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$, então encontramos que:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha. \quad (1.17)$$

Substituindo, aqui, os valores de E_1 e E_2 de (1.16) e extraindo a raiz quadrada, obtemos:

$$E = \frac{K_e}{\varepsilon} q \sqrt{\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2} \cos \vartheta}. \quad (1.18)$$

No caso particular, quando $r_1 = r_2 = r$, temos:

$$E = q \frac{K_e}{\varepsilon r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}$$

ou

$$E = q \frac{K_e}{\varepsilon r^2} 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

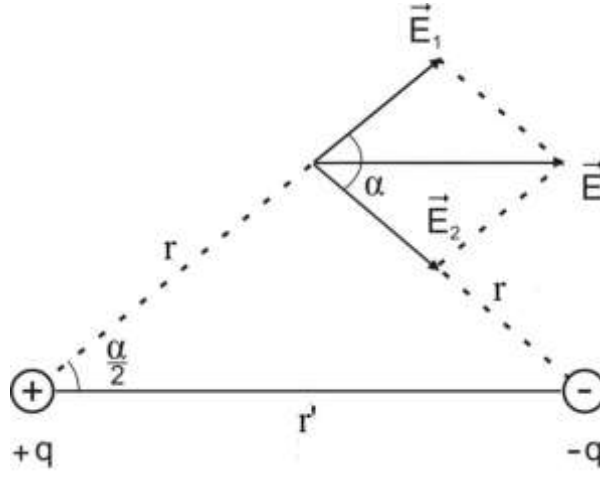


Figura 1.5

Notemos que $2r \cos \frac{\alpha}{2} = r'$, (veja Figura 1.5). Então,

$$E = \frac{K_e}{\epsilon} \frac{q}{r^3} 2r \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{K_e q r'}{\epsilon r^3} E =$$

ou

$$\vec{E} = \frac{K_e \vec{p}}{\epsilon r^3}. \quad (1.19)$$

Quando o ponto de observação encontra-se a uma distância que ultrapassa, significativamente, r' , pode-se considerar que $r_1 \cong r_2$. Então, introduzindo o ângulo θ entre r e r' , da fórmula (1.14) pode-se obter:

$$E = \frac{K_e}{\epsilon} \frac{p}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}. \quad (1.20)$$

Se um dipolo é colocado num campo elétrico uniforme, ou seja; um campo de mesma intensidade em cada ponto do espaço (em módulo e direção), sobre ele age um par de forças que dá origem a um movimento de rotação (até a posição em que o ângulo α é igual a $\frac{\pi}{2}$). Veja a Figura 1.6.

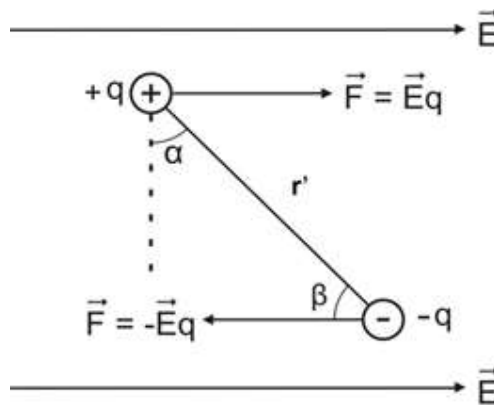


Figura 1.6

Como se sabe dos cursos de mecânica, o momento de rotação, também conhecido como torque deste par de forças, é determinado pela grandeza:

$$\tau = E q r' \cos \alpha,$$

ou

(1. 21)

$$\tau = E q r' \sin \beta.$$

Na física, existem grandezas que são vetores polares e outras que são vetores axiais. Velocidade, aceleração, força, campo elétrico, mometo linear, etc são vetores polares. Por outro lado, aqueles vetores que resultam de um produto vetorial de dois vetores polares ou que podem ser expressos como rotacional de outro vetor são vetores axiais. A velocidade angular, o momento angular, o torque de forças, o campo magnético, são todos vetores axiais.

Como o momento de um par de forças (torque) é um vetor axial (a direção de rotação determina a direção deste vetor, pela regra do parafuso de rosca direita ou regra da mão direita), então, matematicamente, ele pode ser expresso por meio de um produto vetorial:

$$\vec{\tau} = \vec{r'} \times \vec{E} q = q \vec{r'} \times \vec{E},$$

ou

(1. 22)

$$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}.$$

O estudo mais avançado dos fenômenos elétricos e magnéticos mostrou que existe uma relação íntima entre eles. As interações elétricas entre os corpos relacionam-se com o estado estático, ou seja, com cargas fixas. Quando as cargas encontram-se em movimento, o quadro complica-se muito, pois um corpo carregado em movimento cria no seu entorno um campo magnético e esse causa ação de força sobre os corpos magnéticos. Um fluxo de partículas carregadas, que vamos chamar de corrente elétrica, cria em torno de si linhas de forças fechadas do campo magnético. Ao mesmo tempo, cada partícula traz consigo o campo elétrico. Naturalmente que, se as partículas carregadas movem-se dentro de um corpo eletricamente neutro, ou seja, de um corpo composto de quantidades iguais de partículas carregadas positivas e negativas, então, a intensidade de campo elétrico em volta deste corpo será igual a zero, ao passo que o campo magnético pode ser muito forte.

Imaginemos que um corpo carregado esteja em movimento, e que os campos criados por este sejam estudados por dois observadores. Um deles se encontra num sistema de coordenadas que se move juntamente com o corpo, ou seja, num sistema onde a carga está imóvel; o outro se encontra num sistema, relativo ao qual a carga se move. Neste caso, o outro observador registrará também a presença da interação magnética. Já esse caso simples de interação de corpos carregados em movimento mostra

que os fenômenos elétricos e magnéticos têm uma natureza comum, isto é; relacionam-se com as propriedades eletromagnéticas da matéria e devem ser estudadas conjuntamente.

O campo elétrico e o campo magnético estáticos são um caso particular deste fenômeno, como na mecânica, onde a estática é um caso particular dinâmica.

CAPÍTULO 2

INDUÇÃO. LINHAS DE FORÇA. TEOREMA DE GAUSS-OSTROGRADSKI

A eletrização de um corpo neutro pode ser feita por dois métodos: pela comunicação da carga de outro corpo a esse corpo ou pela separação das cargas positivas e negativas existentes em cada corpo. O segundo método tem o nome de indução ou influência elétrica. A carga elétrica é uma propriedade da matéria. As menores partículas da matéria conhecidas, até agora, já atingem algumas dezenas, são elementos de substância carregados ou neutros. As partículas fundamentais que compõem os átomos de todas as substâncias conhecidas são os elétrons, os prótons e os nêutrons. O elétron é uma partícula elementar carregada, o próton (de massa 1836 vezes maior que a massa do elétron) tem, exatamente, a mesma carga do elétron, mas de sinal contrário, ou seja, tem carga positiva. O nêutron, de massa praticamente igual à do próton, é eletricamente neutro. O núcleo do átomo de qualquer substância, exceto o hidrogênio, contém prótons e nêutrons, logo, está carregado positivamente e a sua carga é igual à soma das cargas dos prótons. Apenas o núcleo do átomo de hidrogênio contém apenas um próton. Os elétrons, que formam o invólucro de um átomo de qualquer substância, têm cargas negativas de valor igual à do núcleo, já que o número de elétrons é igual ao número de prótons. Consequentemente, o átomo é eletricamente neutro. A unidade dos átomos num corpo macroscópico forma a estrutura da substância. Com isto, em algumas substâncias formam-se elétrons livres, que podem, facilmente, se movimentar, se a substância for colocada num campo elétrico. Tais substâncias são chamadas de condutores de eletricidade. Noutras substâncias, o movimento dos elétrons ao longo do campo é impossível. Eles estão ligados em células elementares de suas estruturas. Tais substâncias são chamadas de dielétricas ou isolantes. Uma classe intermediária forma os chamados semicondutores, que há mais de meio século vem encontrando ampla aplicação na eletrônica.

Agora, imaginemos que de um corpo neutro, mas condutor A, aproximamos dele um corpo B carregado positivamente (Figura 2.1a). As cargas negativas ao serem atraídas pelas cargas positivas do corpo aproximado B deslocar-se-ão no condutor A e criarão cargas negativas naquele lado do condutor que está mais próximo de B. O lado oposto do corpo A terá um excesso de cargas positivas. Vamos unir esta parte do condutor, por meio de um fio l , a qualquer corpo bastante grande D (Figura 2.1b).

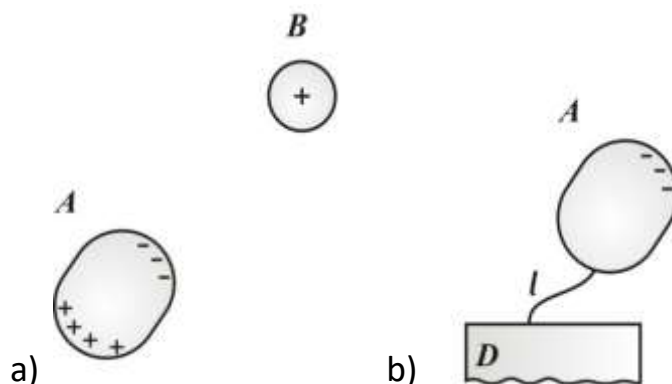


Figura 2.1

Então, as cargas positivas do corpo A serão neutralizadas pelas cargas negativas do corpo D. Retirando-se em seguida o fio *l*, nós obteremos o corpo A carregado negativamente.

O corpo *D* adquirirá, naturalmente, uma carga excedente positiva, em conformidade com a lei de conservação de carga. Entretanto, se o corpo *D* é suficientemente grande, esta carga será imperceptível, pois a sua densidade volumétrica (ou seja, a carga por unidade de volume) será desprezível. Geralmente, em tais experimentos, a Terra desempenha o papel do corpo *D*, por isso, a neutralização das cargas da parte correspondente do corpo A é realizada com a conexão deste corpo à Terra ou ligação a Terra do corpo A.

O valor da carga induzida é determinado pela intensidade de campo. Para um campo uniforme, ele não depende da distância entre a fonte do campo e o corpo condutor. No caso da proximidade da carga indutora do condutor, a carga induzida pode ser considerada igual à que a induz ainda que o campo não seja uniforme. As cargas elétricas num condutor introduzido no campo de ação de forças elétricas (indução) distribuem-se de acordo com as condições de equilíbrio, ou seja:

1. Dentro do condutor (substância com cargas que se movem livremente) a intensidade do campo é igual a zero (em caso contrário, haveria movimento de cargas dentro do condutor);
2. As cargas situam-se somente na superfície (repulsão);
3. A componente tangencial do campo na superfície do condutor é igual a zero (em caso contrário haveria movimento de cargas pela superfície);
4. O campo dentro de um corpo condutor oco, livre de cargas nessa região, é igual a zero. A última afirmação é uma consequência da primeira, porque num corpo condutor maciço o campo não existe internamente e consequentemente a extração de partes internas não mudará o estado elétrico do espaço (as cargas situam-se somente na superfície do condutor).

O fenômeno de indução aqui examinado é amplamente utilizado na eletrotécnica e nas pesquisas físicas.

No fenômeno da indução está baseado o funcionamento da chamada máquina de indução elétrica ou máquina eletromagnética, utilizável amplamente na eletrização de corpos para demonstração dos

fenômenos elétricos. Esta máquina consiste de dois discos dielétricos nos quais estão dispostas lâminas de metal condutor como mostra a Figura 2.2.

A máquina de indução elétrica é capaz de separar as cargas da substância neutra das lâminas condutoras e criar cargas significativas, se as lâminas condutoras opostas de cada disco forem ligadas através de escovas fixas e os discos forem girados em sentidos contrários. Contudo, a velocidade relativa diminuirá de duas vezes, quando apenas um dos discos for girado.

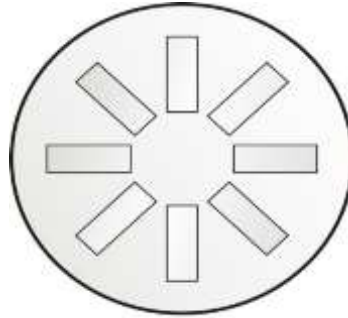


Figura 2.2

Para tornar o funcionamento da máquina de indução elétrica mais compreensível, vejamos uma variante desta, mais simples e que, no lugar dos discos, possui dois cilindros dielétricos com placas condutoras (Figura 2.3).

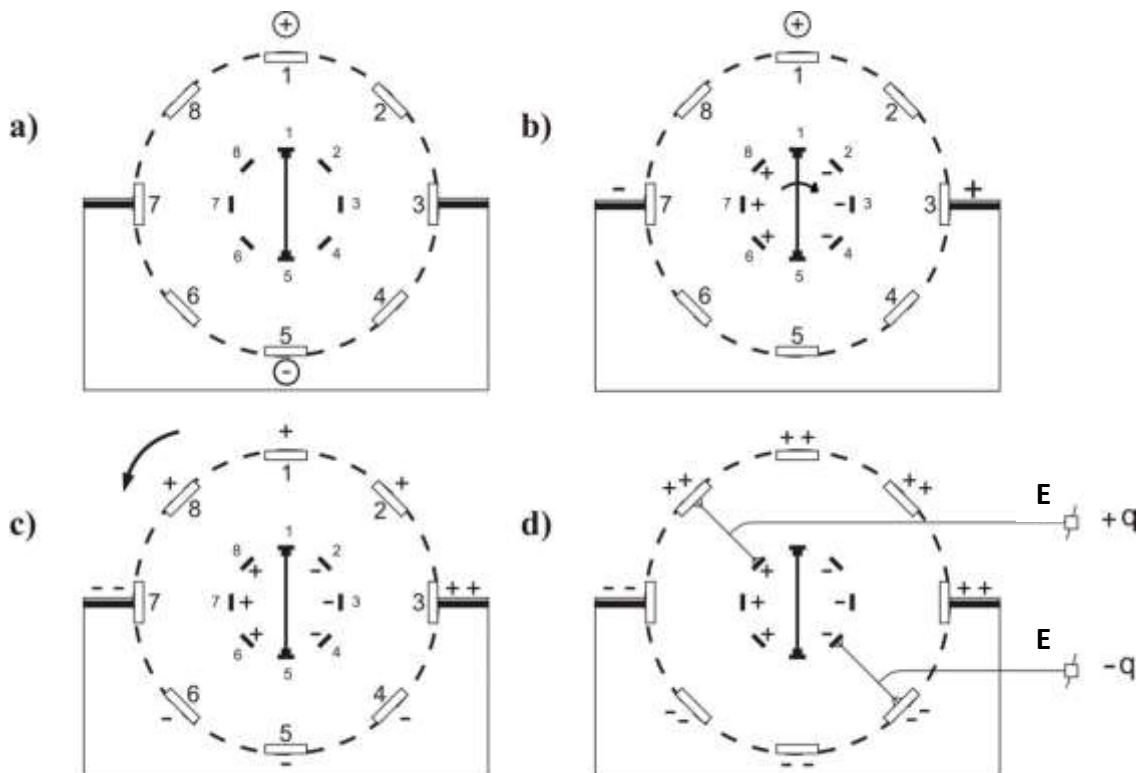


Figura 2.3

Vamos girar ambos os cilindros, um depois do outro, de meia volta.

Na Figura 2.3a é mostrada a posição inicial e uma carga positiva (dentro do círculo) que aparece por acaso na placa (sempre surge, aleatoriamente, nas conduções de laboratório, uma pequena carga, de forma análoga como surge carga no toque do vidro com a seda).

Vamos girar o cilindro interno de meia volta no sentido horário (Figura 2.3b). Como resultado, todo o lado direito deste cilindro será portador de cargas negativas e o esquerdo de cargas positivas.

Se, agora, girarmos o cilindro externo de meia volta no sentido anti-horário, então, nas placas externas haverá influência das placas carregadas da metade do cilindro interno, originando mais carga induzida.

Desta maneira, cada volta aumenta a carga induzida que é transferida ao eletrodo E. Consequentemente, o funcionamento da máquina elétrica é baseado no fenômeno da indução. Contudo, o atrito das escovas com o disco, aqui, não desempenha nenhum papel no surgimento da eletrização.

Com a carga obtida com a ajuda da máquina de indução, ou por outro meio, é possível realizar uma série de experiências simples que mostram as propriedades do campo elétrico. Assim, como consequência da eletrização, pequenas tiras de papel, unidas por um dos extremos, formam um feixe divergente (buquê de tiras de papel), pedaços leves de papel colocados entre as placas carregadas realizam movimentos (saltos) entre as placas, etc.

Em todas estas experiências nos convencemos da existência do campo elétrico. Vamos estudar as propriedades deste campo. Como qualquer outro campo de forças, é cômodo estudar o campo elétrico do ponto de vista dos conceitos geométricos.

$$\vec{F} = q\vec{E}; \frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}.$$

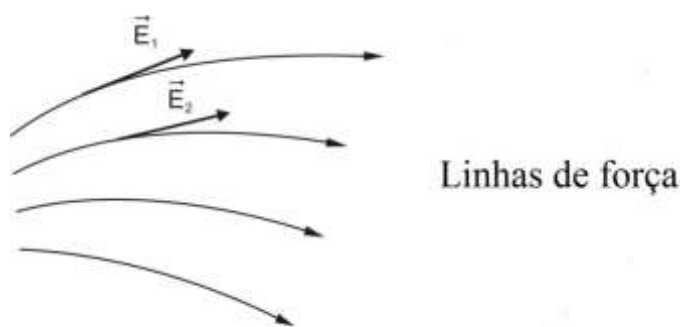


Figura 2.4

Assim como o campo gravitacional, o campo elétrico é caracterizado por linhas de força, ou seja; por trajetórias de cargas de prova colocadas no campo. Em cada ponto do campo, a força que atua na carga de prova é tangente às linhas de força. Se a carga de prova é igual à unidade (positiva), então, numericamente, a força que atua nela é igual à intensidade de campo (Figura 2.4).

Vamos introduzir o conceito de número de linhas de força, para os cálculos e a compreensão do assunto. Tendo em mente a convencionalidade deste conceito, vamos considerar que, se a intensidade

de campo é igual a $\vec{E}$, então isso significa que através de um elemento de superfície unitária perpendicular a $\vec{E}$ passam as linhas de forças. Abaixo, veremos, o quanto este conceito facilita o estudo teórico do campo e contribui para uma melhor compreensão das suas leis fundamentais. Da definição introduzida, resulta que o número de linhas de força que passam por uma superfície arbitrária será igual ao módulo da intensidade do campo $\vec{E}$ multiplicada pela projeção desta superfície sobre a superfície normal as linhas de força, ou seja :

$$\Phi_E = S_{\perp} E, \quad (2.1)$$

Se a superfície for representada pelo vetor $\vec{S}$, então o produto $S_{\perp} E$ pode ser escrito como um produto escalar $(\vec{S} \cdot \vec{E})$. Logo,

$$\Phi_E = (\vec{S} \cdot \vec{E}). \quad (2.2)$$

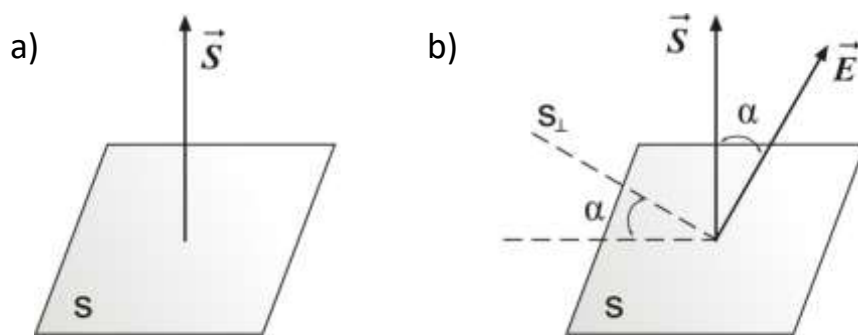


Figura 2.5

A validade desta representação é ilustrada na Figura 2.5a, que mostra que a projeção da superfície S sobre a superfície normal a $\vec{E}$ é equivalente a projeção do vetor $\vec{S}$ sobre o vetor $\vec{E}$, por quanto o ângulo entre $\vec{S}$ e $\vec{E}$ é igual ao ângulo entre a superfície S e a normal a $\vec{E}$ (na Figura 2.5b este ângulo é simbolizado por α). O caso considerado relaciona-se com a superfície plana S . Se a superfície S é curva, então conclusão desse tipo pode ser aplicada ao elemento de superfície dS ,

$$d\Phi_E = (\vec{E} \cdot d\vec{S}), \quad (2.3)$$

logo,

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}). \quad (2.4)$$

É natural que o produto escalar $(\vec{E} \cdot d\vec{S})$ pode ser escrito de outra forma, tomando o elemento de superfície dS como uma grandeza escalar, mas, nesse caso, no lugar de $\vec{E}$ colocamos a sua componente normal à superfície, isto é,

$$\Phi_E = \int_S E_n dS. \quad (2.5)$$

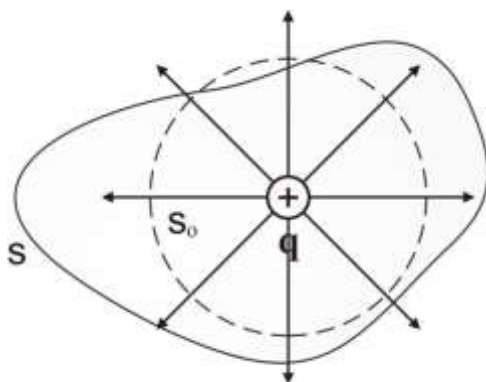


Figura 2.6

A grandeza Φ_E , ou seja, o número de linhas de força que passam através de dada superfície, tem o nome de fluxo do vetor $\vec{E}$ através da superfície S .

Encontremos o fluxo através da superfície fechada S , que contém a carga q (Figura 2.6). Em primeiro lugar, vamos mostrar que este fluxo, independentemente da forma da superfície S , é igual ao fluxo através da esfera S_0 . Com efeito, cada parte da superfície S deve ser projetada sobre a superfície normal às linhas de força, ou seja, deve representar parte de uma esfera. Porquanto a intensidade do campo $\vec{E}$ é inversamente proporcional a r^2 e a área da esfera é diretamente proporcional a r^2 , o número de linhas de força (fluxo) que passa através de uma esfera de qualquer raio é o mesmo, ou seja, não depende do raio. Este resultado tem uma importância fundamental. Portanto,

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E = 4\pi r^2 \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.6)$$

Dessa maneira, sem depender da forma da superfície fechada, o fluxo total do vetor $\vec{E}$ através dessa superfície é determinado apenas pela carga q e pela permissividade dielétrica absoluta ϵ' . De acordo com expressão (2.4), para qualquer superfície, temos:

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}). \quad (2.7)$$

Se a superfície é fechada, introduzimos o símbolo

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}),$$

ou através da componente normal do campo elétrico

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS.$$

De acordo com (2.6), para uma superfície fechada, temos:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon'} . \quad (2.8)$$

Desse modo, para uma superfície fechada, escrevemos:

$$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.9)$$

Esta relação é conhecida na teoria de campo como teorema de Gauss-Ostrogradski ou simplesmente teorema de Gauss. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi um célebre matemático, físico e astrônomo alemão, que apresentou trabalhos sobre o magnetismo terrestre. Mikhail Ostrogradski (1801-1862) foi um destacado matemático russo, membro da Academia de Ciências de São Petersburgo.

Se a carga q representa a soma de cargas distribuídas, discretamente, em dado volume, então, o teorema (2.9) toma a forma:

$$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (2.10)$$

Para uma distribuição contínua de carga com densidade ρ , obtemos:

$$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \oint_V \rho dv, \quad (2.11)$$

onde v é o volume ocupado pelas cargas.

Em todos esses casos, a superfície S , naturalmente, engloba a região em que se encontram as cargas.

No caso de uma distribuição arbitrária de cargas, utilizaremos a relação (2.11) para o volume elementar dv , dentro do qual a densidade de carga é constante. Na Figura 2.7 está representado um volume elementar em forma de paralelepípedo.

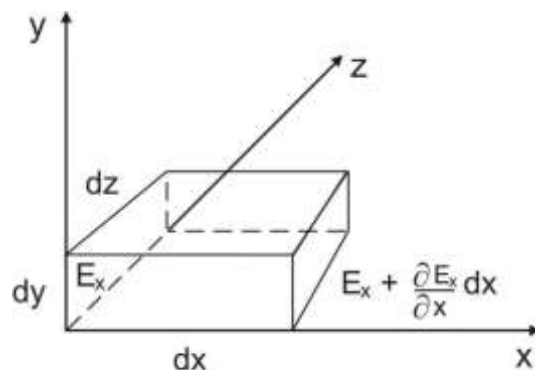


Figura 2.7

Dentro deste volume está encerrada a carga ρdv . Vamos calcular o fluxo através da superfície deste paralelepípedo. Por definição, vamos simbolizar o fluxo através do lado $dydz$, na origem das coordenadas representadas na figura, como:

$$E_x dy dz . \quad (2.12)$$

O fluxo através da superfície oposta, ou seja, que passa através do ponto que dista da origem das coordenadas pelo eixo x de dx , será igual a:

$$(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx) dy dz . \quad (2.13)$$

pois, a componente da intensidade do campo na secção que dista do ponto $x = 0$ de dx será diferente de E_x pela grandeza

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} dx .$$

Consequentemente, o fluxo resultante, através desses dois lados, será igual à diferença

$$\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz - E_x dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dv . \quad (2.14)$$

Notemos que, ao tomarmos a diferença para a determinação do fluxo resultante, estamos, de fato, tomando a soma dos fluxos para fora do volume elementar. Notemos que E_x na superfície $dydz$, que passa pela origem, está orientado para a esquerda (isto é; para fora do volume), por isso $E_x dydz$ tem sinal menos, de modo que em (2.14), temos a soma dos fluxos para fora.

A relação análoga a (2.14), terá lugar também para os outros dois pares de lados da superfície do paralelepípedo, isto é;

$$\left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \right) dx dz - E_y dx dz = \frac{\partial E_y}{\partial y} dv, \quad (2.15)$$

$$\left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) dx dy - E_z dy dz = \frac{\partial E_z}{\partial z} dv.$$

Desta maneira, o fluxo total do vetor $\vec{E}$ através da superfície do paralelepípedo é igual a:

$$d\Phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (2.16)$$

De acordo com o teorema de Gauss-Ostrogradsky,

$$d\Phi_E = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \rho dv. \quad (2.17)$$

Daqui, seque-se a relação diferencial

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \rho. \quad (2.18)$$

O primeiro membro desta igualdade, consequentemente, representa o fluxo do vetor $\vec{E}$ através da superfície do volume elementar, relativo à unidade de volume.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_E}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S E_n dS. \quad (2.19)$$

Esta grandeza tem o nome de divergência do vetor $\vec{E}$ e, abreviadamente, é simbolizada por $\text{div } \vec{E}$. Desta forma, obtivemos a relação:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho. \quad (2.20)$$

Esta relação é consequência do teorema de Gauss-Ostrogradski na forma integral e é conhecida como “Lei de Gauss na forma diferencial”. Qualquer relação do tipo (2.19), aplicada a um vetor arbitrário, não necessariamente o campo elétrico $\vec{E}$, é chamada de teorema da divergência. Para a dedução da lei de Gauss, foi utilizado o triedro esquerdo (Figura 2.7), em vez do triedro direito, mas, neste caso, o resultado final não se altera. Ela é com frequência escrita em uma forma mais abrangente, quando se leva em consideração que em alguns meios a permissividade dielétrica não é constante e depende das coordenadas:

$$\text{div } \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \rho. \quad (2.21)$$

A grandeza $\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ tem o nome de densidade do fluxo elétrico, indução elétrica ou deslocamento elétrico e é simbolizada pela letra $\vec{D}$, isto é.

$$\text{div } \vec{D} = \rho. \quad (2.22)$$

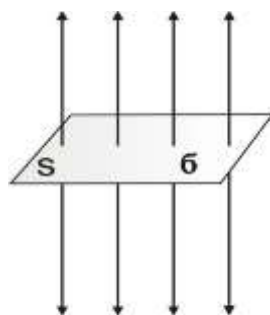


Figura 2.8

O operador div que aplicamos nos vetores $\vec{E}$ e $\vec{D}$ acima pode ser escrito de uma forma mais elegante como ∇ (operador **del** ou operador nabla). Ele é um operador vetorial, que ao ser aplicado escalarmente a um vetor produz um escalar (divergência) e ao ser aplicado vetorialmente a um vetor produz outro vetor (rotacional). Quando ∇ é aplicado a um escalar, produz um vetor (gradiente). Portanto, podemos escrever a equação (2.22) como

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho.$$

Temos assim a lei de Gauss, escrita na forma diferencial, do modo mais compacto possível.

O teorema de Gauss-Ostrogradski permite resolver com facilidade uma série de problemas práticos e importantes, por exemplo, encontrar a intensidade do campo de uma superfície carregada S

com densidade superficial de carga σ (Figura 2.8). Neste caso, as linhas de força são perpendiculares à superfície (a densidade superficial de carga σ é a mesma em todos os pontos e as componentes tangenciais excluem-se, como mostra a Figura 2.9).

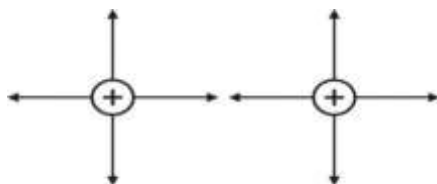


Figura 2.9

Então, o número de linhas de força através da superfície fechada, que circunda o plano carregado, será igual a

$$\Phi_E = 2SE. \quad (2.23)$$

Pelo teorema de Gauss-Ostrogradski, encontramos

$$\Phi_E = 2SE = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \sum q_i. \quad (2.24)$$

Determinemos a carga total

$$\sum q_i = \sigma S, \quad (2.25)$$

daqui,

$$2SE = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \sigma S, \quad (2.26)$$

isto é;

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon \epsilon_0} \text{ ou } D = \frac{\sigma}{2}. \quad (2.27)$$

Determinemos a intensidade do campo entre duas placas uniformemente carregadas, igualmente, mas com cargas de sinais contrários (capacitor plano). Este exemplo é mostrado na Figura 2.10.

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} . \quad (2.30)$$

Daqui, encontramos a indução elétrica (a densidade do fluxo elétrico)

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} .$$

Notemos que o campo externo de uma esfera de raio r coincide com o campo de uma carga pontual, situada no centro da esfera. Um cálculo direto, com o emprego do teorema de Gauss-Ostrogradski mostra que no caso de uma esfera de material dielétrico uniformemente carregada, o campo interno a uma distância r do centro da esfera tem módulo $D = \frac{1}{3}\rho r$.

Vamos finalmente encontrar a intensidade do campo de um cilindro infinito à distância r do seu eixo (Figura 2.12).



Figura 2.12

Tomemos a unidade de comprimento correspondente à carga q :

$$\Phi_E = 2\pi r E = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} q ,$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \text{ ou } D = \frac{q}{2\pi r} . \quad (2.31)$$

Na superfície do cilindro

$$D = \frac{q}{2\pi R} .$$

Do teorema de Gauss-Ostrogradski se deduz também que o campo de uma esfera oca, uniformemente carregada, é igual a zero no seu interior, enquanto o campo fora desta esfera é igual ao campo de uma carga pontual, como no caso de uma bola uniformemente carregada (2.30), localizada no seu centro. O teorema de Gauss-Ostrogradski é uma consequência da lei de Coulomb e é importante que:

$$F \sim \frac{1}{r^2} .$$

Quando a proporcionalidade é outra, não se aplica o teorema de Gauss-Ostrogradski.

CAPÍTULO 3

ENERGIA DAS CARGAS NUM CAMPO ELETROSTÁTICO. POTENCIAL

Como o campo eletrostático exerce uma força sobre um corpo carregado, realiza-se trabalho com o seu deslocamento. Encontremos, por exemplo, a energia de um dipolo inserido num campo eletrostático uniforme (Figura 3.1).

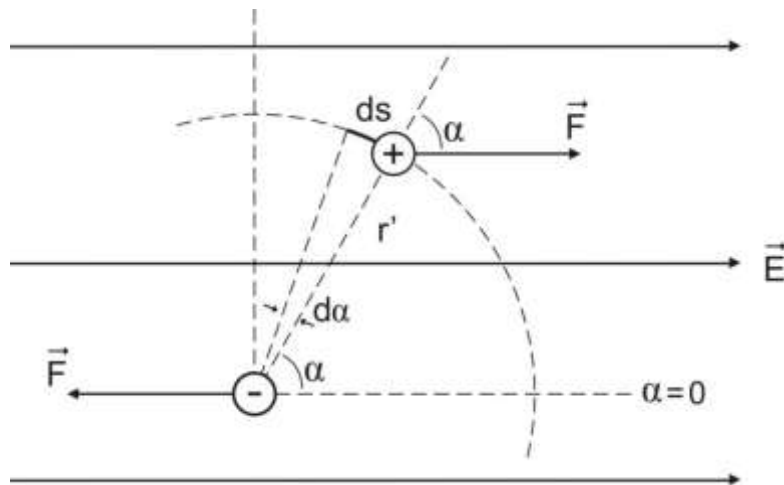


Figura 3.1

Da Figura 3.1, segue-se que

$$ds = r' d\alpha. \quad (3.1)$$

O trabalho realizado neste caminho com o deslocamento da carga q pela força $F = E q$ é definido pela grandeza

$$dW = Eqdssen\alpha,$$

$$dW = Eqr'sen\alpha d\alpha. \quad (3.2)$$

Daqui,

$$W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} Eqr' \sin \alpha d\alpha = -Eqr' \cos \alpha$$

ou

$$W = -pE \cos \alpha = -(\vec{p}\vec{E}), \quad (3.3)$$

ou seja, com o deslocamento desde o ponto $\alpha = \frac{\pi}{2}$ até α , um dipolo num campo eletrostático pode

realizar trabalho (3.3). No caminho, desde o ponto $\alpha = \frac{\pi}{2}$ até $\alpha = 0$, o trabalho realizado será igual à grandeza

$$W = -pE. \quad (3.4)$$

Vamos resolver o segundo problema que trata da característica energética das cargas e do campo por elas criado.

Encontremos a energia de interação de duas cargas pontuais que se encontram a uma distância r uma da outra. Seja a carga q_1 fixa. Qual trabalho deve ser realizado sobre a carga q_2 , para trazê-la do infinito até um ponto situado a uma distância r da carga q_1 ?

Encontremos o trabalho realizado no segmento elementar dr (Figura 3.2).

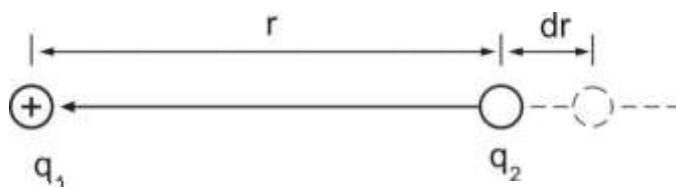


Figura 3.2

$$dW = Fdr; \quad F = \frac{K_e}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$dW = \frac{K_e}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr. \quad (3.5)$$

Daqui, obtemos

$$W = \int \frac{K_e}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -\frac{K_e}{\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (3.6)$$

Consequentemente, a carga q_2 possui no campo da carga q_1 , a uma distância r desta, a energia potencial:

$$\varepsilon_p = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q_1 q_2}{4\pi r} = -W. \quad (3.7)$$

Vamos tomar a carga q_2 como uma carga de prova, para o estudo do campo. De acordo com (3.7), a energia potencial que possui a carga de prova depende, não somente do seu valor q_2 , mas também do valor da carga q_1 e de r , determinante do campo. Consequentemente, esta energia pode ser utilizada para descrever o campo, da mesma forma que a força que atua numa carga de prova foi utilizada para este objetivo. Diferentes cargas de prova q_2', q_2'' , etc. vão ter, num mesmo ponto do campo, energias diferentes. Contudo, como se vê de (3.7), a razão $\frac{\varepsilon_p}{q_2}$ será a mesma para todas as cargas.

A grandeza $\varphi = \frac{\varepsilon_p}{q_2}$ chama-se potencial do campo em dado ponto e é utilizada juntamente com a intensidade de campo E para descrever os campos elétricos.

Vamos simbolizar esta grandeza pela letra φ . Então,

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{4\pi r} = K_e \frac{q}{\varepsilon r}. \quad (3.8)$$

Como segue de (3.8), o potencial é numericamente igual à energia potencial que possui uma carga unitária positiva em dado ponto.

Encontremos a relação entre φ e E . Das fórmulas

$$\varphi = \frac{K_e}{\varepsilon} \frac{q}{r}, \quad E = \frac{K_e}{\varepsilon} \frac{q}{r^2}, \quad (3.9)$$

conclui-se que:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (3.10)$$

Esta relação, obviamente, surge da própria definição de potencial, como sendo o trabalho realizado pelo campo enquanto ocorre o deslocamento de uma carga unitária. Seja, por exemplo, o campo criado por uma carga positiva. Então, E é positivo, mas o acréscimo do potencial no elemento dr é negativo (o potencial diminui com o distanciamento da fonte do campo).

$$-d\varphi = E dr. \quad (3.11)$$

Se o campo é devido a uma carga negativa, então $\vec{E}$ é negativo; logo, uma carga unitária positiva é atraída pela fonte do campo e o acréscimo do potencial no segmento dr será positivo

$$d\varphi = (-E dr). \quad (3.12)$$

ou seja, em todos os casos

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Vamos definir a unidade de potencial no SI. De modo análogo ao que é feito em outros ramos da física, como unidade desta grandeza, tomamos o potencial de um ponto do campo, tal que, para o deslocamento de uma carga de 1 coulomb desde o infinito até esse ponto, necessita-se de um trabalho de 1 joule. Essa unidade chama-se volt (V).

No sistema CGSE, como unidade de potencial, naturalmente, se toma o potencial de um ponto do campo até o qual é preciso realizar um trabalho de um *erg*, para deslocar uma carga de 1 unidade CGSE desde o infinito. Conhecendo estas definições, vamos encontrar a relação entre o volt e a unidade CGSE.

Determinemos quanto vale a unidade de potencial em CGSE expressa em *volts*. Vamos tomar a unidade de carga no CGSE, i.e. $(3.10^9)^{-1}$ coulombs e realizemos o trabalho de 1 *erg* com o seu deslocamento até o dado ponto. Como $1 \text{ erg} = 10^{-7} J$, encontremos o potencial do campo neste ponto, expresso em *volts*:

$$\varphi = \frac{10^{-7}}{(3.10^9)^{-1}} V = 300V, \quad (3.13)$$

isto é; a unidade de potencial no sistema CGSE é igual a 300V. Na física atômica e nuclear, frequentemente se utiliza a unidade de energia o elétron-volt (eV). Esta grandeza representa o trabalho realizado para deslocar um elétron entre pontos cuja diferença de potencial é igual a um volt.

Não é difícil expressar esta grandeza em joules:

$$1 \text{ eV} = e.1V = 1,6.10^{-19}.1J = 1,6.10^{-19} J. \quad (3.14)$$

Vamos chamar de superfície equipotencial ao lugar geométrico de pontos com o mesmo potencial.

Não é difícil demonstrar que a superfície de um corpo metálico introduzido num campo elétrico é uma superfície equipotencial. Realmente, vamos admitir que dois pontos A e B na superfície de um condutor tenham potenciais diferentes (Figura 3.3a). Isto significa que para o deslocamento de uma carga de A para B é preciso realizar (ou obter) trabalho, ou seja, ao longo da superfície do corpo na

direção AB atua uma força tangencial. Nas condições de equilíbrio eletrostático, tal força está ausente, caso contrário, haveria deslocamento de cargas. Daqui, se deduz que os potenciais φ_1 e φ_2 devem ser iguais e as linhas de forças são perpendiculares à superfície do corpo.

Como consequência desta dedução, vamos considerar a distribuição de cargas na superfície de um condutor de forma irregular com saliências agudas (Figura 3.3b).

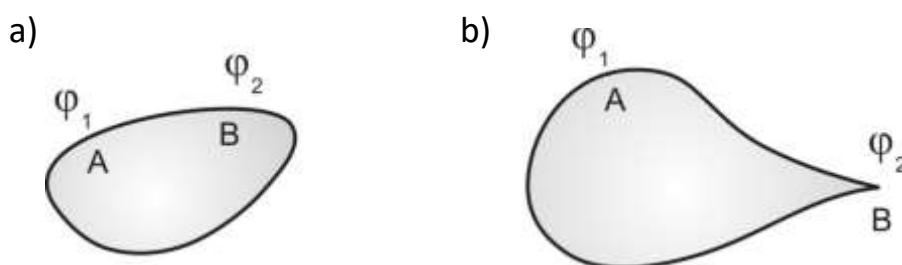


Figura 3.3

Para o deslocamento de uma carga unitária desde o infinito até o ponto A e o ponto B , é preciso realizar um mesmo trabalho. Contudo, a superfície com cargas perto do ponto A , com a mesma densidade de carga, exerceria sobre a carga que se aproxima uma ação de força mais forte que a superfície perto de B . Isto é visível, particularmente, à pequena distância do corpo, quando a força de interação é grande.

Para uma igualdade dos potenciais nos pontos A e B é preciso que a densidade superficial de carga seja diferente, ou seja, a densidade nas pontas e partes salientes do corpo deve ser maior que a densidade de cargas em outras partes do corpo. Este fenômeno, isto é, a alta densidade de cargas nas pontas, é ilustrado de forma clara nas experiências com o chamado “vento elétrico” – com a corrente de ar a partir da ponta do corpo carregado. A ventoinha com pontas, estando carregada, começa a girar (Figura 3.4).

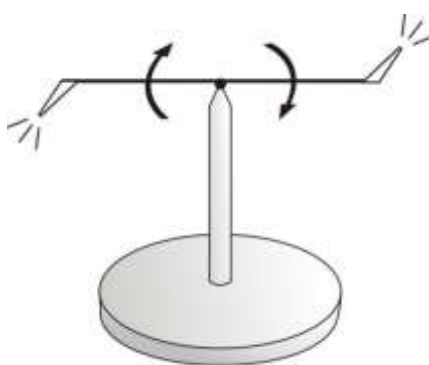


Figura 3.4

Isto se explica pelo fato de que, perto das pontas, forma-se uma alta densidade de cargas, ou seja, grande intensidade do campo que atua no ar circundante e as suas partículas ionizam-se (as moléculas neutras transformam-se em partículas carregadas, como resultado da remoção de elétrons). Os íons entram em movimento levando consigo moléculas neutras; forma-se o “vento elétrico”. Assim, o

surgimento da rotação do molinete encontra explicação (apesar da lei da conservação do momento angular).

A igualdade dos potenciais na superfície de um condutor no campo eletrostático permite entender porque dentro de um corpo metálico oco (sobre o corpo maciço já falamos antes) a intensidade do campo é igual a zero (se dentro, naturalmente, desta cavidade não há cargas). Na realidade, se a intensidade do campo dentro da cavidade fosse diferente de zero, para o deslocamento de uma carga de um ponto a outro da superfície dentro da cavidade seria necessário realizar trabalho, o que significaria que entre estes pontos existe diferença de potencial, o que contradiz a condição inicial.

Na prática, para analisar os fenômenos elétricos, em geral, usamos a diferença de potencial entre dois pontos do campo e não os potenciais propriamente ditos, visto ser esta a grandeza relevante. O valor desta diferença de potenciais chama-se tensão, é simbolizada pela letra V e é medido, naturalmente, em volts. Deve-se notar que a tensão e a intensidade do campo são grandezas físicas diferentes.

Da relação

$$dV = E dr, \quad (3.15)$$

concluimos que a dimensão de intensidade de campo $\vec{E}$ pode ser escrita assim:

$$[E] = \frac{\text{volt}}{\text{metro}}. \quad (3.16)$$

Já a dimensão de tensão é simplesmente “volt”, ou por definição, $\frac{J}{C}$.

Encontremos a diferença de potencial entre as placas de um capacitor plano (Figura 3.5).

Por definição, esta grandeza é numericamente igual ao trabalho gasto no deslocamento de uma carga $q = +1$ de uma superfície do capacitor até a outra, ou seja, o produto da força pela distância:

$$V = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (3.17)$$

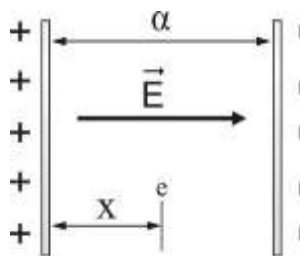


Figura 3.5

Lembremos que o primeiro “capacitor” a ser criado pelo homem foi a “garrafa de Leiden”. Em 1746, o físico holandês Pieter van Musschenbroek (1692-1761), professor na Universidade de Leiden, estava tentando aumentar o conteúdo de eletricidade eletrostática na água de um recipiente, ligado a um cano de metal contendo um fio metálico mergulhado na água. Um assistente segurava o recipiente, enquanto Musschenbroek carregava o cano por atrito. Quando o assistente tocou no cano com a outra mão, levou um choque bastante violento. A experiência foi repetida e ficou confirmado que a água, que é um dielétrico podia acumular uma quantidade apreciável de eletricidade. Assim foi descoberta a “garrafa de Leiden”, o primeiro capacitor ou “condensador”, como passaram a ser chamados os dispositivos aptos a armazenar cargas elétricas.

A diferença de potencial entre uma das placas e certo ponto x , encontramos de forma análoga:

$$V_x = E x = \frac{\sigma x}{\epsilon_0 \epsilon},$$

ou

$$V_x = \frac{V}{d} x = V \frac{x}{d}. \quad (3.18)$$

Não é difícil encontrar a diferença de potencial num capacitor esférico, (duas esferas concêntricas, Figura 3.6).

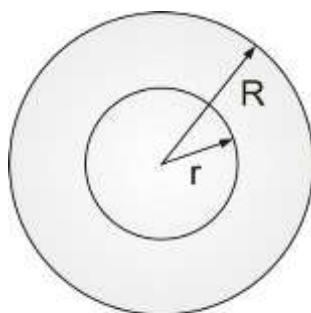


Figura 3.6

O potencial de uma esfera, analogamente ao potencial de uma carga pontual, é igual a:

$$\varphi_{esfera} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{4\pi r}. \quad (3.19)$$

A diferença de potencial num capacitor esférico é determinada pela expressão:

$$V_{esfera} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right). \quad (3.20)$$

Vamos encontrar a diferença de potencial num capacitor cilíndrico (dois cilindros coaxiais, relativamente compridos, de material condutor) através do cálculo do trabalho realizado para o deslocamento de uma carga $q = +1$ de uma superfície (cilindro de raio a) à outra (cilindro de raio b). Este caso é representado na Figura 3.7.

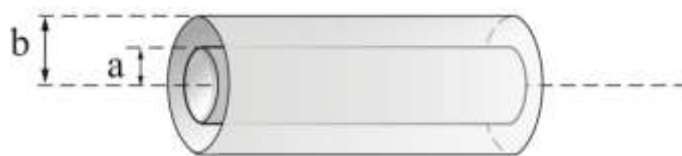


Figura 3.7

A expressão para a intensidade do campo E de um cilindro comprido é:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{2\pi r},$$

onde q é a carga por unidade de comprimento.

Daqui,

$$V = \int_a^b \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{2\pi r} dr = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

ou

$$V = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{b}{a}. \quad (3.21)$$

Encontremos, agora, o potencial do campo de um dipolo num ponto afastado, e pelo potencial determinemos o campo em si.

O potencial de um dipolo, no ponto A será igual à soma dos potenciais dos campos das duas cargas $+q$ e $-q$ (Figura 3.8).

$$\varphi = \frac{K_e q}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{K_e q}{\varepsilon} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}. \quad (3.22)$$

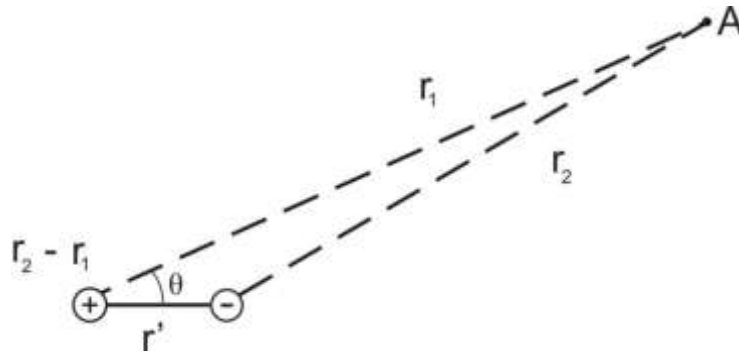


Figura 3.8

Para os pontos suficientemente distantes ($r_1 \gg r'$, $r_2 \gg r'$) pode-se escrever

$$r_1 - r_2 \approx r' \cos \theta; \quad r_1 r_2 \approx r^2, \quad (3.23)$$

onde r é a distância média do ponto A ao dipolo.

Então,

$$\varphi = \frac{K_e q r' \cos \theta}{\varepsilon r^2} = \frac{K_e p \cos \theta}{\varepsilon r^2}. \quad (3.24)$$

Conhecendo o potencial, vamos agora determinar as componentes do campo. No sistema de coordenadas polares, temos (Figura 3.9):

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2 p \cos \theta}{4 \pi r^3 \varepsilon \varepsilon_0} = \frac{2 K_e p \cos \theta}{\varepsilon r^3}, \\ E_\theta &= \frac{-p \sin \theta}{4 \pi r^3 \varepsilon \varepsilon_0} = -\frac{K_e p \sin \theta}{\varepsilon r^3}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

de onde, obtemos:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{K_e p}{\varepsilon r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}, \quad (3.27)$$

que coincide com a fórmula.

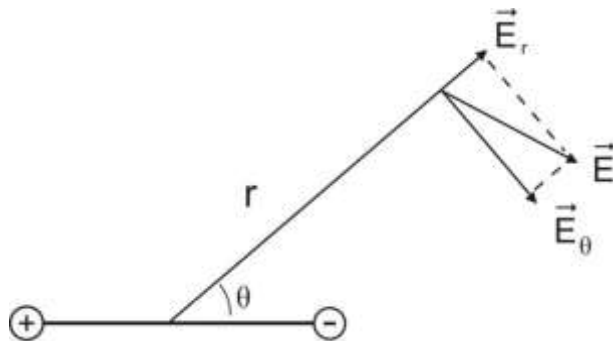


Figura 3.9

Neste problema, examinamos o caso em que foi preciso encontrar duas componentes do campo. Geralmente, o campo possui três componentes em relação às respectivas coordenadas. No sistema cartesiano, elas são

$$E_x, E_y \text{ e } E_z.$$

Da relação

$$\vec{E} = E_x \vec{x}_o + E_y \vec{y}_o + E_z \vec{z}_o. \quad (3.28)$$

Onde $\vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o$ são vetores unitários e

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.29)$$

obtemos

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{x}_o + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{y}_o + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{z}_o \right). \quad (3.30)$$

A grandeza entre parênteses chama-se gradiente do escalar φ e representa-se como: “*grad* φ ”. Consequentemente,

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (3.31)$$

O gradiente pode também ser indicado por meio do operador ∇ , já introduzido no capítulo anterior. Assim temos

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Esta relação entre $\vec{E}$ e φ permite escrever de outra forma a expressão (2.18):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho.$$

Substituindo a relação (3.29), obtemos:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho. \quad (3.32)$$

Esta é a chamada equação de Poisson. Na ausência de cargas, ou seja, $\rho = 0$, a equação correspondente tem o nome de equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.33)$$

Para abreviar, o segundo membro (soma das derivadas parciais de segunda ordem por todas as coordenadas) é simbolizada pela letra Δ e a equação (3.32) e (3.33) tomam respectivamente as formas:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho. \quad (3.34)$$

$$\Delta\varphi = 0. \quad (3.35)$$

Nas regiões livres de cargas, emprega-se a equação de Laplace, nas regiões que apresentam alguma distribuição de cargas é preciso utilizar a equação de Poisson. As soluções dessas equações são, em geral, trabalhosas; é preciso conhecer as condições de fronteiras e as técnicas matemáticas adequadas.

(às vezes no lugar do símbolo Δ utiliza-se o símbolo ∇^2 , chamado “nabla ao quadrado”, operador de Laplace ou simplesmente laplaciano). Esta última equação é conhecida como equação de Laplace e o operador ∇^2 é chamado de laplaciano, em homenagem a Pierre-Simon Laplace (1749-1827), que fez uso desses recursos matemáticos, em seu monumental *Traité de mécanique céleste*, publicado entre 1798 e 1827. Simeón Denis Poisson (1781-1840) foi um célebre engenheiro, físico e matemático francês, que produziu importantes trabalhos em mecânica, eletromagnetismo e teoria das probabilidades.

CAPÍTULO 4

TRABALHO NUM CAMPO DE FORÇAS POTENCIAIS – CAPACITÂNCIA ELÉTRICA

O campo de força de uma carga pontual é um campo de força central: as linhas de força são retas radiais convergentes (cargas negativas) ou divergentes (cargas positivas) em relação ao centro, ponto de localização da carga. Para tal campo de forças, de forma mais evidente, ilustra-se a independência da trajetória do trabalho gasto no transporte de carga de um ponto a outro (Figura 4.1).

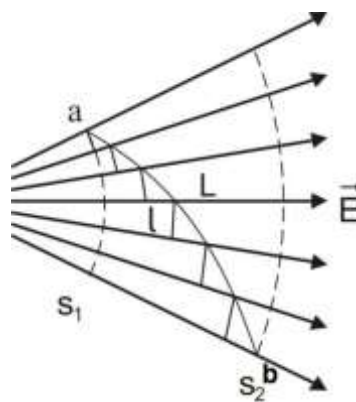


Figura 4.1

Qualquer linha do ponto a ao ponto b , pode ser substituída por uma linha quebrada equivalente l , composta de segmentos orientados ao longo das linhas de força e segmentos perpendiculares a estas. Para o deslocamento de uma carga pelos segmentos perpendiculares às linhas de força não é preciso realizar trabalho contra as forças do campo (as forças são perpendiculares ao deslocamento). O trabalho resultante por unidade de carga, conseqüentemente, sempre é igual à diferença de potencial entre os pontos a e b , ou seja; entre as esferas equipotenciais de raios correspondentes s_1 e s_2 . Generalizando para caso de campos eletrostáticos mais complexos, concluímos que o trabalho necessário para o deslocamento de uma carga nestes campos é determinado pelos potenciais nos pontos inicial e final do caminho e não depende da escolha desse caminho. O trabalho ao longo dum caminho fechado em tal campo é igual a zero. Como sabemos do curso de mecânica, tais campos são chamados campos potenciais e as forças são forças conservativas.

Notemos que a impossibilidade da existência de linhas de força retilíneas do campo cuja intensidade dependa de uma ou mais coordenadas é consequência do caráter potencial do campo.

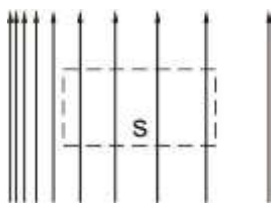


Figura 4.2

Se imaginarmos a existência de tal campo (Figura 4.2), então, o trabalho realizado pelo caminho fechado L neste campo é diferente de zero; em outras palavras, colocando em tal campo um sistema circular de cargas (Figura 4.3), podemos obter um “moto contínuo”, o que contradiz a lei da conservação da energia.

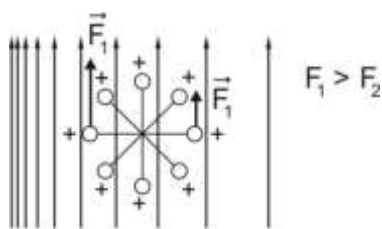


Figura 4.3

A expressão para o trabalho durante o deslocamento de uma carga num campo eletrostático, por qualquer contorno L, do ponto a ao ponto b, representa a integral do produto da componente tangencial da intensidade do campo E_t pelo elemento do contorno dL.

$$W = q \int_a^b E_t dl, \quad (4.1)$$

ou

$$W = q \int_a^b (\vec{E} \cdot d\vec{l}). \quad (4.2)$$

Desta forma, estabelecemos que qualquer corpo carregado cria, em torno de si, um campo, cada ponto desse campo possui potencial. Podemos concluir (fórmula (3.19)) que o potencial de uma esfera de raio R, uniformemente carregada, é igual a:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{r}. \quad (4.3)$$

Na superfície da esfera $r = R$, o potencial correspondente será definido pela fórmula:

$$\varphi_{esfera} = \frac{K_e}{\varepsilon} \frac{q}{R}. \quad (4.4)$$

Esta fórmula, como todas as outras, que determinam o valor do potencial, para diferentes corpos carregados, mostra que ele é diretamente proporcional à carga q comunicada ao corpo.

Um corpo portador de uma carga q pode possuir um potencial diferente do potencial de outro corpo portador de carga igual. Como mostra a fórmula (4.4), para as esferas, o valor do potencial é inversamente proporcional ao raio.

O valor da carga necessária para elevar o potencial de um corpo de uma unidade chama-se capacitância do corpo e é simbolizado pela letra C . Consequentemente, a capacitância C é a razão da carga comunicada ao corpo pelo valor do potencial criado por este corpo (na sua superfície).

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (4.5)$$

A unidade de capacitância, naturalmente, será a capacitância daquele corpo cujo potencial aumenta-se de 1volt ao receber uma carga de 1 coulomb. Essa unidade de capacitância chama-se farad.

Encontremos a capacitância de uma esfera. O potencial de uma esfera é determinado pela fórmula (4.4). A razão de q por esta grandeza dá a capacitância C .

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{q}{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{4\pi R}} = \varepsilon_0 \varepsilon 4\pi R. \quad (4.6)$$

No sistema CGSE o potencial da esfera no vácuo ($\varepsilon = 1$) é expresso pela fórmula :

$$\varphi = \frac{q}{R}, \text{ pois, } K_e = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} = 1. \quad (4.7)$$

Consequentemente,

$$C = R, \quad (4.8)$$

isto é., a capacitância pode ser expressa em centímetros ou metros.

A unidade de capacitância no sistema CGSE é a capacitância de uma esfera de raio igual a 1 cm.

Encontremos quanto vale esta grandeza em farad. Substituindo na fórmula (4.6)

$$R = 1cm = 0,01m.$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot 0,01 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-2} F = \frac{1}{9} 10^{-11} F .$$

Desta maneira, 1cm de capacitância é igual a $\frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \text{ farad}$. Aproximadamente, pode-se considerar que

$$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-12} \approx 10^{-12}, \quad (4.9)$$

ou seja, $1 \text{ cm} \approx 10^{-12} \text{ farad}$ (exatamente : $1 \text{ cm} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-12} F$).

A grandeza $10^{-12} F$ chama-se picrofarad (pF), ou micromicrofarad, i.e.,

$$1 \text{ cm} \approx 1\text{pF} . \quad (4.10)$$

Introduzindo o conceito de capacitância e de sua unidade de medida, o farad, pode-se dar outra expressão da dimensão da permissividade dielétrica do vácuo:

$$[\varepsilon_0] = \frac{C^2}{N \cdot m^2} = \frac{C \cdot C \cdot V}{V \cdot N \cdot m^2} = \frac{F \cdot C \cdot V}{N \cdot m^2} = \frac{F \cdot N \cdot m}{N \cdot m^2} = \frac{F}{m} .$$

Encontremos, agora, a capacitância de um capacitor plano, conhecendo a diferença de potencial deste

$$V = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

determinemos C :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon q}{\sigma d}. \quad (4.11)$$

Expressando a carga q através da densidade superficial, $q = \sigma S$, onde S é a superfície da placa, encontramos

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \sigma S}{\sigma d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (4.12)$$

Não é difícil de calcular a capacitância de um capacitor esférico. O seu potencial é determinado pela fórmula (3.20):

$$V = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Daqui,

$$C = \frac{q}{V} = \varepsilon_0 \varepsilon 4\pi \left(\frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} \right)$$

ou

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{4\pi r R}{R - r}. \quad (4.13)$$

Para um capacitor cilíndrico, temos (ver fórmula (3.21)):

$$V = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{b}{a}.$$

Consequentemente,

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (4.14)$$

É útil notar que as expressões (4.13) e (4.14) para os casos em que $R - r \ll R$ ou $b - a \ll a$, têm a mesma forma. Naturalmente se num capacitor esférico $R - r = d$ (ao passo que $d \ll R$), então,

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{4\pi r R}{R - r} \approx \varepsilon_0 \varepsilon \frac{4\pi R^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (4.15)$$

No caso de um capacitor cilíndrico, com o comprimento l , se $(b - a) = d \ll a$:

$$\ln \frac{b}{a} = \ln \frac{a + d}{a} = \ln \left(1 + \frac{d}{a} \right) \approx \frac{d}{a}. \quad (4.16)$$

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln \frac{b}{a}} \approx \frac{\varepsilon_0 \varepsilon 2\pi a l}{d} \approx \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (4.17)$$

Assim, a fórmula da capacitância de um capacitor plano pode ser utilizada tanto para os casos de capacitores esféricos como para os cilíndricos quando as distâncias entre as placas são pequenas.

Vejamos, por exemplo, como pode ser encontrada a capacitância de um capacitor plano que tem duas camadas de dielétricos diferentes entre as placas (ϵ_1 e ϵ_2). Seja a espessura das camadas d_1 e d_2 (Figura 4.4).

Então,

$$V = V_1 + V_2, \quad (4.18)$$

onde V_1 e V_2 são as diferenças de potencial entre os limites das camadas do primeiro e do segundo dielétrico, respectivamente.

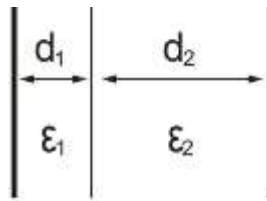


Figura 4.4

Como

$$\begin{aligned} V_1 &= E_1 \cdot d_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_1} d_1, \\ V_2 &= E_2 \cdot d_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_2} d_2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

temos:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma d_1}{\epsilon_1 \epsilon_0} + \frac{\sigma d_2}{\epsilon_2 \epsilon_0}} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}. \quad (4.20)$$

Se $\epsilon_1 = \epsilon_2$, esta fórmula converte-se na fórmula comum de capacitância do capacitor plano.

O caso mais complicado é, por exemplo, o cálculo da capacitância (por unidade de comprimento) de uma linha condutora dupla. Seja a o raio do condutor e d a distância entre eles (Figura 4.5).

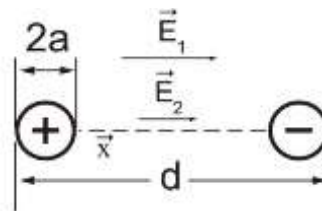


Figura 4.5

A diferença de potencial entre os condutores não depende da forma do caminho, por isso, escolhemos o caminho retilíneo que une os centros dos condutores.

Vamos escrever a expressão para a intensidade do campo no ponto x . O primeiro condutor (+) dá a intensidade do campo (ver fórmula (2.31)):

$$E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{2\pi x}, \quad (4.21)$$

onde q é a carga por unidade de comprimento (densidade linear). O segundo condutor (-) dá origem ao campo E_2 , igual a:

$$E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q}{2\pi(d-x)}, \quad (4.22)$$

daqui

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right). \quad (4.23)$$

Encontremos a diferença de potencial entre a superfície do primeiro condutor e a superfície do segundo, respectivamente para $x = a$ e $x = d - a$.

$$V = \int_a^{d-a} E \, dx = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx. \quad (4.24)$$

O cálculo da integral conduz à expressão:

$$V = \frac{2q}{\varepsilon_0 \varepsilon 2\pi} \ln \frac{d-a}{a}. \quad (4.25)$$

No caso em que $d \gg r$, encontramos:

$$V = \frac{q}{\pi \varepsilon \varepsilon_0} \ln \frac{d}{a}.$$

De onde, obtemos a capacitância por unidade de comprimento

$$C \cong \frac{q}{\left(\frac{q}{\pi \varepsilon \varepsilon_0}\right) \ln \frac{d}{a}} = \frac{\pi \varepsilon \varepsilon_0}{\ln \left(\frac{d}{a}\right)}. \quad (4.26)$$

Como consequência desta expressão, vamos encontrar a capacitância por unidade de comprimento de um condutor horizontal situado na altura h sobre a superfície da Terra (ou de uma tela). Para isto, utilizemos a imagem especular do condutor (Figura 4.6).

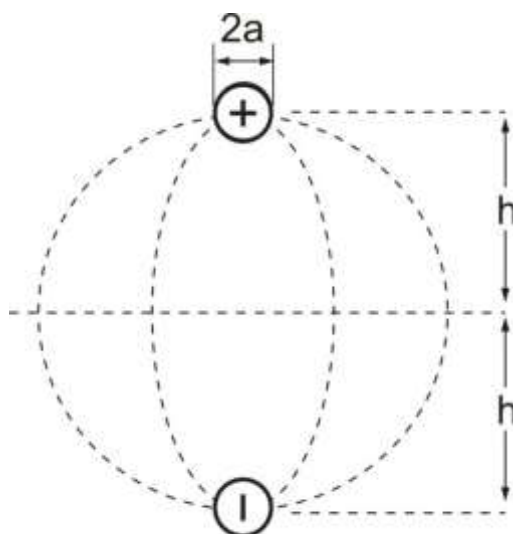


Figura 4.6

A validade desta substituição é óbvia: as linhas de força devem ser perpendiculares à superfície da tela (Terra), ou seja, a representação do campo para ambos os casos é a mesma, com a diferença apenas de que a diferença de potencial, no caso real, é duas vezes menor que no caso de uma linha condutora dupla. Consequentemente,

$$V = \frac{V_{\text{linha dupla}}}{2}, \quad (4.27)$$

de onde, segue:

$$C = \frac{2\pi \varepsilon \varepsilon_0}{\ln \frac{2h}{a}}. \quad (4.28)$$

A dependência da capacitância do capacitor da distância entre as placas pode ser utilizada para medir pequenos potenciais. Para isso, ligando o capacitor à fonte elétrica, nós o carregamos com uma carga determinada até o potencial V_0 . Desligando o capacitor e distanciando as suas placas, ou seja, diminuindo a capacitância, com a mesma carga, nós criamos uma diferença de potencial muito maior na sua envoltura.

Encontremos a energia armazenada num capacitor carregado, ou seja, o trabalho realizado para deslocar a carga q para as placas do capacitor até tal estado em que a sua diferença de potencial seja igual a V .

O trabalho elementar (energia), isto é, o trabalho necessário para o deslocamento do elemento de carga dq é igual a:

$$dW = Vdq . \quad (4.29)$$

Como $q = CV$, encontramos: $dq = CdV$.

Consequentemente,

$$W = C \int V dV = \frac{1}{2} CV^2 , \quad (4.30)$$

ou

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} qV . \quad (4.31)$$

Conhecendo esta expressão, é útil encontrar a energia do campo, ou a energia localizada na unidade de volume do espaço entre as placas do capacitor:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{2d} V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon S d}{d^2} V^2 = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon v \left(\frac{V}{d} \right)^2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} v, \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde v é o volume do espaço entre as placas ($v = S \cdot d$). Desta maneira, por unidade de volume tem-se a seguinte energia do campo (densidade de energia):

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} . \quad (4.33)$$

Para concluir, determinaremos o valor da capacitância de um sistema de capacitores ligados em paralelo e em série (Figura 4.7 e Figura 4.8).

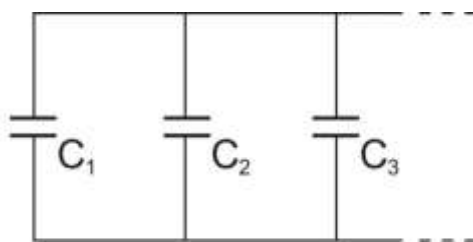


Figura 4.7

No caso da ligação em paralelo, nas placas dos capacitores, em todas as partes o potencial é o mesmo (caso contrário haveria movimento de cargas). Consequentemente,

$$q_1 = VC_1 ; q_2 = VC_2 , \dots \text{etc.},$$

isto é

$$q = \sum_i q_i = V \sum_i C_i .$$

Desta maneira, na ligação em paralelo

$$C = \sum_i C_i . \quad (4.34)$$



Figura 4.8

Na ligação em série, todos os capacitores contêm a mesma carga:

$$V_1 = \frac{q}{C_1}; \quad V_2 = \frac{q}{C_2}; \quad V_3 = \frac{q}{C_3} \dots \text{etc.} .$$

$$V = \sum_i V_i = q \sum_i \frac{1}{C_i} ,$$

isto é,

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} . \quad (4.35)$$

CAPÍTULO 5

OS DIELETRICOS NO CAMPO ELÉTRICO

Diferentemente dos condutores, os dielétricos não possuem cargas que se movimentem livremente (elétrons). As moléculas dos dielétricos são partículas neutras da substância ou dipolos elétricos. No último caso, diz-se que a substância é composta de moléculas polares. Se o dielétrico é colocado num campo elétrico, então, as moléculas neutras das substâncias não polares, sob ação deste campo polarizam-se, ou seja, transformam-se em dipolos como resultado do afastamento das cargas positivas e negativas. Na Figura 5.1a mostra-se uma molécula não polar e na Figura 5.1b esta mesma molécula está inserida no campo elétrico $\vec{E}$. As moléculas polares no campo elétrico, em primeiro lugar, orientam-se no sentido do campo, pois surge um momento de rotação

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad (5.1)$$

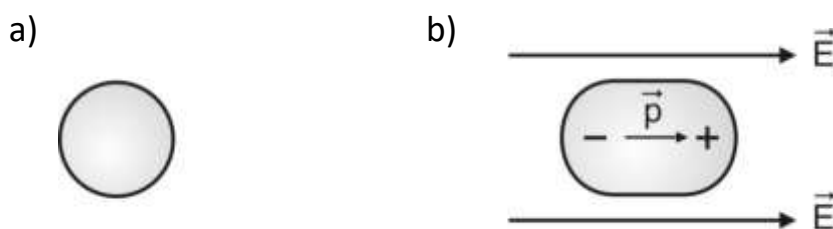


Figura 5.1

e em segundo lugar, aumentam o seu momento dipolar alongando-se sob a ação das forças do campo. Na Figura 5.2a, mostra-se uma molécula polar fora da ação do campo $\vec{E}$ e na Figura 5.2b sob a ação do campo $\vec{E}$.

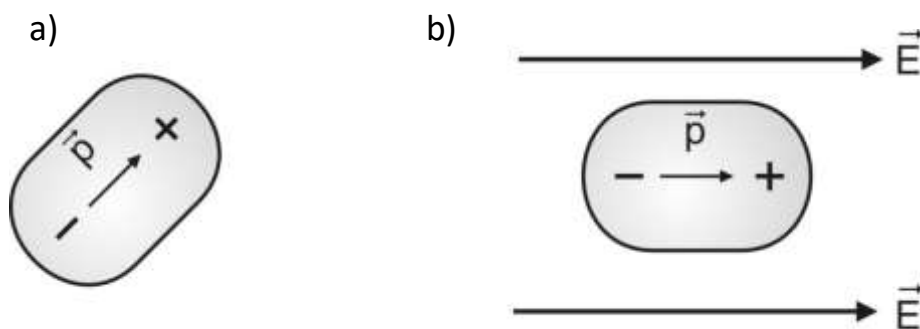


Figura 5.2

Naturalmente que é preciso ter em conta que o movimento térmico das moléculas faz variar constantemente as orientações desses dipolos, por isso é a sua orientação média que vai caracterizar a orientação no sentido do campo.

O fenômeno de polarização das moléculas no campo elétrico explica também a influência do meio na força de interação entre corpos carregados, isto é; a natureza física do coeficiente ϵ' na lei de Coulomb. A Figura 5.3 mostra que um corpo carregado inserido num meio dielétrico provoca a sua polarização, ou seja; o surgimento de cargas superficiais de sinal contrário na superfície de contato do dielétrico com o corpo.

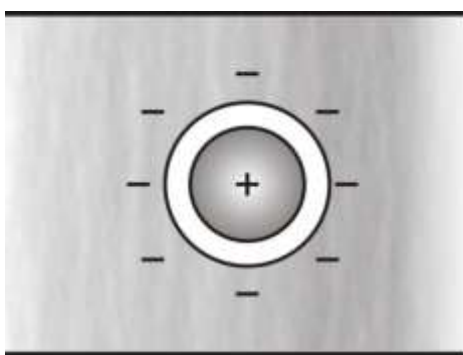


Figura 5.3

Como resultado, o corpo carregado é circundado por uma camada com cargas de sinal contrário, que diminuem a carga do corpo carregado, isto é; que neutraliza uma parte da carga, o que diminui a força de interação coulombiana e, conseqüentemente, o campo do corpo carregado.

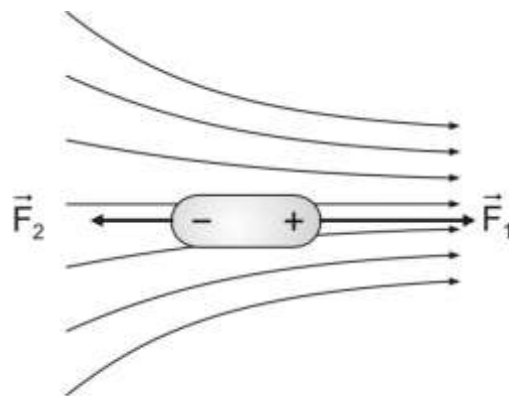


Figura 5.4

No caso de campos não uniformes, no dipolo (e conseqüentemente, nas moléculas polares e não polares) não somente atua um par de forças, mas também uma força que imprime ao dipolo um movimento de translação ou que cria uma tensão mecânica na substância. Esta força é fácil de ser encontrada, se for conhecida a dependência da intensidade de campo elétrico das coordenadas.

A Figura 5.4 mostra que, no caso de um campo não uniforme, temos $F_1 \geq F_2$, por isso, na posição em que o momento de rotação torna-se igual a zero, permanece a força aplicada ao dipolo $F_1 - F_2$, diferente de zero, e isso explica o fenômeno distensão dos dielétricos num campo elétrico.

Agora vamos fazer uma avaliação quantitativa do fenômeno de polarização dos dielétricos no campo elétrico.

O vetor $\vec{P}$ chama-se vetor de polarização de um dielétrico, que é o momento de dipolo resultante por unidade de volume da substância do dielétrico. Portanto,

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{P}_i, \quad (5.2)$$

onde $\vec{P}_i$ é o momento de dipolo de uma molécula, N é o número de moléculas no volume ΔV . A dimensão desta grandeza é

$$[\vec{P}] = \frac{C \cdot m}{m^3} = \frac{C}{m^2}, \quad (5.3)$$

mas esta é a dimensão da grandeza $\epsilon_0 \vec{E}$ (como consequência da lei de Coulomb) e, por outro lado, esta é a dimensão da densidade superficial de cargas. Esta situação nos permite, em primeiro lugar, relacionar $\vec{P}$ e $\epsilon_0 \vec{E}$ com a ajuda do coeficiente adimensional χ , e em segundo lugar, expressar a polarização $\vec{P}$ através da densidade superficial das cargas de polarização σ' , que surgem na fronteira do dielétrico, como resultado da polarização. Diferentemente da densidade de cargas livres σ , vamos simbolizá-las por σ' .

Por conseguinte,

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (5.4)$$

A grandeza adimensional χ , introduzida desta forma, tem o nome de susceptibilidade dielétrica ou coeficiente de eletrização. Para um dielétrico homogêneo, colocado no campo elétrico uniforme, o momento de dipolo de uma molécula é igual a $P_i = \frac{\chi}{N} \epsilon_0 E = \beta \epsilon_0 E$. A grandeza χ/N , aqui simbolizada pela letra β tem o nome de polarização da molécula. Agora, vamos expressar a grandeza $\vec{P}$ por intermédio de σ' . Vê-se, da Figura 5.5, que o momento resultante de dipolo de certa região do dielétrico (achurada) com qualquer orientação do vetor $\vec{P}$ em relação à fronteira do dielétrico (ângulo α) é igual a:

$$\sigma' \Delta S l, \quad (5.5)$$

mas, por outro lado, esta mesma grandeza, por definição, é igual a $P \Delta V$, onde ΔV é o volume da região achurada.

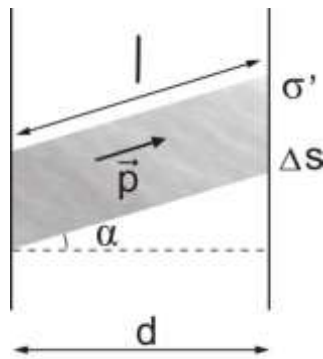


Figura 5.5

Consequentemente,

$$P \Delta V = \sigma' \Delta S l. \quad (5.6)$$

Tendo em conta que $\Delta V = \Delta S \cdot d$, $d = l \cos \alpha$ temos

$$P \Delta S l \cos \alpha = \sigma' \Delta S l, \quad (5.7)$$

Ou

$$P \cos \alpha = \sigma'$$

Quer dizer que a projeção do vetor $\vec{P}$ sobre a normal à superfície do dielétrico é igual à densidade superficial de cargas de polarização:

$$P_n = \sigma'. \quad (5.8)$$

Esta relação nos permite encontrar a ligação entre o deslocamento elétrico $\vec{D}$, a intensidade do campo $\vec{E}$ e a polarização $\vec{P}$.

Examinemos a fronteira de dois dielétricos homogêneos com polarização uniforme (Figura 5.6).

Tomemos uma fronteira que se encontra no campo uniforme $\vec{E}$. Então, na superfície de contato destes dois dielétricos, surgem cargas de polarização com densidades superficiais σ'_1 e σ'_2 .

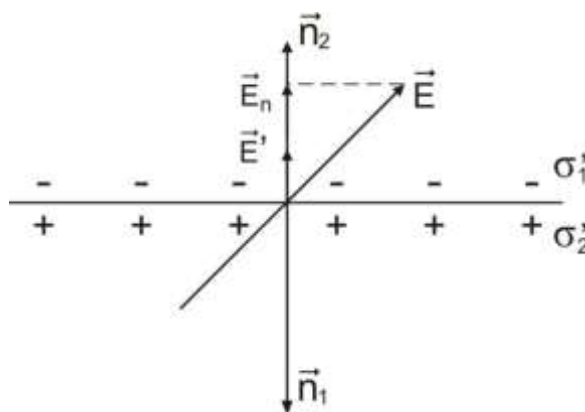


Figura 5.6

Consequentemente, a fronteira entre os dois dielétricos pode ser considerada como um plano carregado com densidade superficial de cargas $\sigma'_1 - \sigma'_2$. Tal superfície resulta numa intensidade de campo que tem somente a componente normal à superfície igual a:

$$E' = \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma'_1 - \sigma'_2), \quad (5.9)$$

o que é resultado da fórmula (2.27).

Desta maneira, as somas das componentes normais do campo elétrico, no meio 1 e no meio 2, serão definidas da seguinte forma :

$$\begin{aligned} E_{n1} &= E_n - \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma'_1 - \sigma'_2), \\ E_{n2} &= E_n - \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma'_1 - \sigma'_2), \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde E_n é a componente do campo $\vec{E}$ normal à superfície dos dielétricos inseridos neste. Daqui,

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma'_1 - \sigma'_2), \quad (5.11)$$

ou

$$\varepsilon_0 E_{n2} - \varepsilon_0 E_{n1} = (\sigma'_1 - \sigma'_2).$$

Utilizando a relação (5.8), obtemos:

$$\varepsilon_0 E_{n2} - \varepsilon_0 E_{n1} = P_{n1} - P_{n2} \quad (5.12)$$

ou

$$\varepsilon_0 E_{n2} + P_{n2} = \varepsilon_0 E_{n1} + P_{n1}.$$

Esta é uma conclusão fundamental: com a existência de fronteira entre dois dielétricos a grandeza $\varepsilon_0 E_n + P_n$ não varia. A grandeza vetorial $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ é a segunda definição do vetor indução elétrica (ou deslocamento elétrico):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (5.13)$$

Na primeira definição, tivemos (ver fórmulas (2.21) e (2.22))

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (5.14)$$

Daqui segue

$$\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (5.15)$$

e como $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$ obtemos

$$\vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} \quad (5.16)$$

ou

$$\varepsilon = 1 + \chi. \quad (5.17)$$

Desta forma, a relação (5.12) diz que a componente normal de $\vec{D}$ ao passar a fronteira não varia:

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (5.18)$$

Notemos que os vetores $\vec{D}$ e $\vec{E}$ coincidem em direção e sentido somente nos dielétricos isotrópicos. No caso de anisotropia, a grandeza ε torna-se um tensor e a relação entre $\vec{D}$ e $\vec{E}$ torna-se mais complexa.

Expressemos, agora, a densidade de cargas superficiais de um dielétrico inserido no campo elétrico por meio da sua permissividade dielétrica. Seja um dielétrico colocado dentro de um capacitor plano (Figura 5.7).

Nas suas superfícies surgem cargas de polarização com densidade σ' .
O campo dentro do capacitor

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}. \quad (5.19)$$

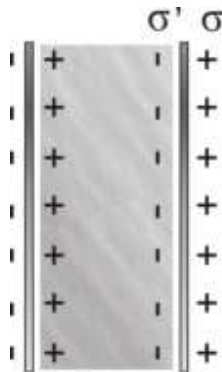


Figura 5.7

Porém, a influência do meio pode ser considerada com a introdução da permissividade dielétrica relativa:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (5.20)$$

Daqui, obtemos:

$$\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0} \quad (5.21)$$

ou

$$\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma. \quad (5.22)$$

Pode ser útil, também, outra expressão que resulta das relações (5.20) e (5.21):

$$\sigma' = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E. \quad (5.23)$$

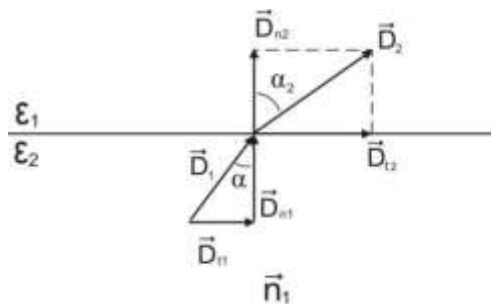


Figura 5.8

Encontremos as condições a que devem satisfazer as linhas de força do campo e as linhas de indução ao passarem pela fronteira entre dois dielétricos. Como já foi estabelecido, as componentes normais do vetor $\vec{D}$ ao passarem pela fronteira do dielétrico não variam, ou seja,

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (5.24)$$

Então, da Figura 5.8, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{D_{t1}}{D_{n1}}, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{D_{t2}}{D_{n2}}, \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} &= \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1 E_{t1}}{\varepsilon_2 E_{t2}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Mas, como as componentes tangenciais da intensidade do campo, ao passarem pela fronteira, não variam, da expressão (5.25), obtemos:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (5.26)$$

Da grande variedade de dielétricos existentes na natureza e daqueles obtidos artificialmente, destacam-se duas classes que encontram ampla aplicação técnica na atualidade: os materiais ferroelétricos e os piezocristais. Os ferroelétricos caracterizam-se pelo grande valor de ε (até alguns milhares), pela dependência de ε da intensidade do campo e pelo fenômeno da *histerese* (isto é, o atraso na variação do vetor $\vec{P}$ com a variação do campo $\vec{E}$). Os piezocristais caracterizam-se pela polarização com as deformações mecânicas (este fenômeno é chamado de efeito piezoelétrico direto) e sofrem deformações sob a ação de um campo elétrico (efeito piezoelétrico inverso). A explicação deste fenômeno consiste em que as redes cristalinas, que não possuem centro de simetria, com a compressão ou alongação, sujeitam-se ao deslocamento acompanhado do surgimento do momento elétrico.

O que é a *histerese*? Histerese é um termo de origem grega com o significado de retardo. Em presença de histerese não há linearidade entre as variáveis. Notação simbólica: seja uma grandeza

causa, representada por C , que produz um efeito representado por E . Diz-se que há histerese, desde que a curva $E = f(C)$, obtida com o crescimento de C não se superpõe à curva $E = f(C)$, obtida com o decrescimento de C . Ao impor à causa C variações periódicas, o fenômeno de histerese é responsável pelo surgimento da curva $E = f(C)$, denominada ciclo de histerese. Um valor x do domínio C pode então ter duas imagens, no contradomínio E . A histerese ocorre tanto na física, como na biologia e até na economia.

CAPÍTULO 6

CORRENTE ELÉTRICA CONTÍNUA. LEI DE OHM

Os elétrons livres de um condutor metálico isolado, por exemplo, de um pedaço de fio de cobre, estão em movimento aleatório, análogo ao das moléculas de um gás num recipiente, não possuindo, em média, nenhum deslocamento contínuo ao longo do fio. Se passarmos um plano perpendicularmente ao eixo do fio o número de elétrons que atravessam o mesmo, por unidade de tempo, é igual nos dois sentidos, ou seja, o fluxo de elétrons é igual a zero.

Entretanto, se ligarmos as extremidades do fio aos terminais de uma pilha, estabelecer-se-á um campo elétrico em todos os pontos do fio, surgirá um movimento ordenado dos elétrons livres do condutor.

Esse campo elétrico atuará sobre os elétrons dando origem a um movimento dos elétrons no sentido oposto ao sentido do campo $\vec{E}$. Diz-se, então, que foi criada uma corrente elétrica I . Se a carga total que atravessa a secção reta de um condutor, durante o tempo t , é igual a q , o valor da corrente será dado por

$$I = \frac{q}{t} \left(A = \frac{C}{S} \right), \quad (6.1)$$

onde I é uma grandeza escalar, sua unidade de medida no sistema SI é o ampère (A) ou coulomb por segundo. No SI, o ampère é a unidade fundamental, ao lado do metro, o quilograma e o segundo. Pequenas correntes são mais convenientemente expressas em miliampère ($1mA=10^{-3}A$) ou em microampère ($1\mu A=10^{-6}A$).

Se I não varia com o tempo, a corrente é denominada corrente contínua. Se o fluxo de cargas variar com o tempo, a corrente será uma função do tempo, sendo definida, então pela primeira derivada da carga em relação ao tempo:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (6.2)$$

A corrente I é uma característica macroscópica de um condutor, como a massa, o volume ou o comprimento do fio. A densidade de corrente $\vec{j}$, que é um vetor, é uma característica local do condutor (de um ponto do condutor) e não do condutor como um todo, é uma grandeza relacionada com a corrente I . Se a corrente elétrica estiver uniformemente distribuída num condutor, cuja secção reta tem a área S , como mostra a Figura 6.1, o módulo da densidade de corrente para todos os pontos desta secção é dada por:

$$j = \frac{I}{S}.$$

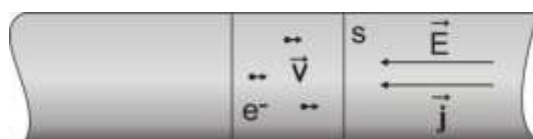


Figura 6.1

O sentido do vetor $\vec{j}$ é dado, em cada ponto, pelo sentido da velocidade dum portador de cargas positivas. Vale sublinhar que um elétron nesse mesmo ponto mover-se-ia no sentido contrário ao vetor $\vec{j}$. A densidade de corrente, também, pode ser definida através da velocidade dos portadores de carga, do numero de cargas e do valor da carga. Se, por exemplo, por unidade de volume, encontram-se n partículas, cada qual tendo a carga e^+ e todas se movendo com velocidade v , então, a densidade de corrente é definida pela expressão:

$$\vec{j} = n e \vec{v}. \quad (6.3)$$

Como $ne = \rho$ é a densidade volumétrica de carga (carga por unidade de volume), a fórmula (6.3) pode ser escrita na forma:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (6.4)$$

Conhecendo $\vec{j}$, é fácil encontrar a corrente total através de dada superfície S . Para isso, é preciso tomar a componente de $\vec{j}$ normal à superfície e multiplicá-la pela área da superfície (Figura 6.2):

$$I = j_n S. \quad (6.5)$$

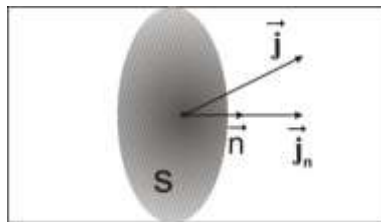


Figura 6.2

Esta relação certamente é válida apenas no caso quando $\vec{j}$ não depende das coordenadas. No caso geral, a corrente que passa através da superfície S é expressa pela integral de $\vec{j}$

$$I = \int_S j_n dS \quad (6.6)$$

ou, através do produto escalar

$$I = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS,$$

onde $\vec{n}$ é um vetor unitário, perpendicular à superfície S (veja a Figura 6.2).

Consideremos uma superfície fechada. A corrente total que passa através de uma superfície fechada S, baseando-se na lei de conservação de cargas, é igual à variação da carga dentro da superfície por unidade de tempo;

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (6.7)$$

Unindo (6.6) e (6.7), temos a expressão da lei de conservação da carga:

$$\oint j_n dS = -\frac{dq}{dt}. \quad (6.8)$$

O sinal “menos” no segundo membro desta equação significa que a corrente que sai da superfície leva à diminuição da carga no interior desta superfície. O primeiro membro da fórmula (6.8), vamos expressar através do operador divergência, que segundo a definição é:

$$\text{div } \vec{j} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{\oint j_n dS}{V} \right), \quad (6.9)$$

onde V é o volume do condutor que contém a superfície S.

Então,

$$\operatorname{div} \vec{j} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{V} \frac{dq}{dt} \right). \quad (6.10)$$

Substituindo $q = \int \rho dV$ e considerando $\rho = \text{const}$, em função das coordenadas, obtemos para $V \rightarrow 0$:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{V} \frac{d}{dt} \int \rho dV \right) = -\frac{d\rho}{dt} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int dV}{V} = -\frac{d\rho}{dt}. \quad (6.11)$$

A equação obtida, que expressa a lei de conservação da carga, tem o nome de equação de continuidade e pode ser representada como segue:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (6.12)$$

Lembremos que o símbolo de derivada parcial, introduzido em (6.12), mostra que quando ρ é função das coordenadas e do tempo, a derivada é efetuada somente pelo tempo.

A propriedade fundamental da corrente consiste em que ela cria um campo magnético na sua vizinhança. O ponteiro de uma bússola perto de um condutor com corrente desvia-se sob a ação da corrente (experiência de Oersted). Além desta ação magnética da corrente, ela também produz ação química e calorífica; a passagem de corrente através de soluções de sais e ácidos resulta na sua dissociação, enquanto um condutor com corrente aquece-se.

Nestas propriedades da corrente estão baseados os funcionamentos de vários aparelhos eletromagnéticos, eletroquímicos e termoelétricos. Assim, pela quantidade de substância obtida da solução pode-se determinar a carga que passa através da solução (coulomb metro), pelo aquecimento do condutor pode-se medir a corrente (amperímetro térmico) etc.

Como exemplo de ação magnética da corrente, consideremos o princípio de funcionamento do galvanômetro balístico. Os galvanômetros balísticos são aparelhos usados para medir a quantidade de carga deslocada por uma corrente de curta duração, como, por exemplo, no processo de carga ou descarga de um capacitor. O aparelho projetado especialmente com esse propósito tem uma bobina, através da qual percorre a carga a ser medida, com momento de inércia maior e suspensões com constante elástica menor do que os instrumentos destinados à medição de corrente.

Consideremos uma bobina de galvanômetro que contém N espiras, tem área S e momento de inércia I , suspensa por um fio de torção com constante elástica k' , imersa num campo magnético permanente. Suponhamos que seja enviado um pulso de corrente através da bobina. A corrente é inicialmente nula, cresce até um valor máximo e depois decresce novamente até o valor zero em um tempo tão curto que a bobina não se move, aparentemente, enquanto o pulso de corrente passa através

dela, ela gira, apenas, depois que a corrente cessa. O torque, em qualquer instante de tempo, durante o pulso de corrente é dado por uma dependência linear, o que confirma o experimento. Temos:

$$\tau = k_1 I, \quad (6.13)$$

onde k_1 é a constante de proporcionalidade. Como foi mostrado em Mecânica, o impulso-angular é igual ao torque integrado em relação ao tempo do pulso de corrente e, ao mesmo tempo, é igual à variação do momento angular:

$$\int \tau dt = I \omega, \quad (6.14)$$

onde ω é a velocidade angular no início do desvio do galvanômetro.

A energia cinética inicial da bobina é transformada em energia potencial elástica do fio de torção, portanto, obtemos

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} k' \theta_m^2, \quad (6.15)$$

onde θ_m é o ângulo máximo de desvio (ou deflexão). Das expressões (6.14) e (6.15), eliminando ω , obtemos

$$k_1 \int I dt = I \omega = I \sqrt{\frac{k' \theta_m^2}{I}} = \sqrt{k' I} \theta_m, \quad (6.16)$$

mas, $\int I dt$ é a carga total Q transferida através da bobina. Assim, temos

$$Q = \frac{\sqrt{k' I}}{k_1} \theta_m = k_b \cdot \theta_m, \quad (6.17)$$

o que mostra que a carga percorrida através da bobina de um galvanômetro balístico é proporcional ao ângulo de desvio máximo. O processo é análogo ao que ocorre quando um pêndulo balístico é atingido por um projétil.

A constante balística do galvanômetro (k_b) depende dos parâmetros do aparelho (momento de inércia, constante elástica e etc.) e pode ser determinada experimentalmente pela medição da carga

conhecida Q_0 em um capacitor de capacitância C . Se entre as placas do mesmo for aplicada uma diferença de potencial V_0 , então, a constante balística será igual a :

$$k_b = \frac{Q_0}{n_0} = \frac{CV_0}{n_0}, \quad (6.18)$$

sendo que n_0 é a leitura do galvanômetro correspondente à carga Q_0 .

Agora, examinemos as condições sob as quais é possível o surgimento da corrente elétrica. Antes de tudo, devem existir cargas capazes de deslocarem-se. Tais cargas existem nos condutores. Para que as cargas entrem em movimento ordenado, que crie corrente, é preciso que nelas atue uma força. Consequentemente, para o aparecimento de corrente entre as extremidades de um condutor deve existir uma diferença de potencial (o trabalho gasto nos deslocamentos das cargas é diferente de zero).

A passagem de carga por um condutor é um processo que tende a levar à igualdade dos potenciais entre as suas extremidades, por isso, para a manutenção de uma diferença de potencial constante, é necessário que haja fontes, chamadas, usualmente, fontes de forças não-eletrostáticas.

A diferença de potencial criada por tais forças não-eletrostáticas (ou seja, o trabalho por unidade de carga deslocada) tem o nome de força eletromotriz da fonte (*f.e.m.*). Este nome é tradicional. Ele se relaciona, sem dúvida, não com uma força, mas com o trabalho necessário para o deslocamento de uma unidade de carga entre os pólos de uma dada fonte de corrente.

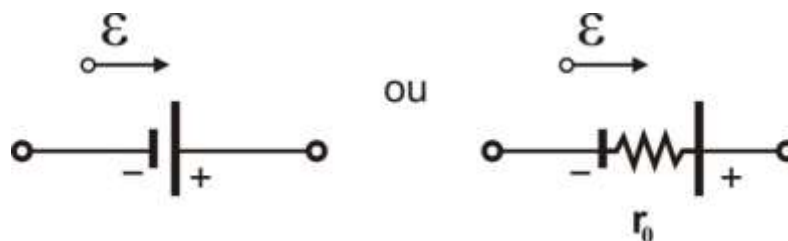
Para que a fonte de *f.e.m.* realize trabalho sobre um portador de cargas, deve haver uma conversão de energia no interior da fonte. Numa bateria, por exemplo, a energia química, é transformada em energia elétrica. Considera-se, pois, uma *f.e.m.* como um dispositivo no qual a energia química, mecânica ou de outra natureza qualquer, é transformada em energia elétrica.

A *f.e.m.* da fonte é definida por

$$\varepsilon = \frac{W}{q} \quad (6.19)$$

e coincide com a diferença de potencial entre os terminais da fonte não ligada no circuito. A unidade de medida da *f.e.m.*, então, coincide com a unidade de diferença de potencial, que no sistema *SI* é o volt.

Nos circuitos elétricos, a *f.e.m.* é designada pelo símbolo convencional seguinte:



A seta dirigida, desde o potencial negativo para o positivo, dentro da fonte, indica o sentido de movimento dos portadores de carga positiva, sob a ação desta fonte se esta atuasse sozinha. A resistência r_0 é denominada resistência interna da *f.e.m.*.

Consideremos, por exemplo, a aplicação de uma diferença de potencial variável V entre os extremos de um fio de cobre, que tem 50 metros de comprimento. Suponhamos que, para cada valor de V , medimos o valor correspondente da corrente I , representando os resultados num gráfico (Figura 6.3a).

A linha reta, obtida experimentalmente, significa que a diferença de potencial e a corrente são diretamente proporcionais, isto é, $V = R I$, onde R é o coeficiente de proporcionalidade que caracteriza o condutor e chama-se resistência. O mesmo, podemos dizer em outras palavras: a resistência de um condutor não depende da diferença de potencial e da corrente elétrica, isto é,

$$R = \frac{V}{I} = \text{const.} \quad (6.20)$$

Este importante resultado, válido para os condutores metálicos, é conhecido pelo nome de Lei de Ohm. Estamos supondo também que a temperatura permaneça, essencialmente, constante durante todas as medidas que são efetuadas. Os condutores que obedecem à lei de Ohm são chamados de condutores ôhmicos ou lineares.

Muitos condutores não obedecem à lei de Ohm. A Figura 6.3b, por exemplo, mostra o gráfico $I = f(V)$ para uma válvula. Como o gráfico não é uma reta, a resistência, neste caso, depende da diferença de potencial. Contudo, a corrente nesse dispositivo será praticamente nula se invertermos a polaridade da diferença de potencial aplicada. Para os condutores metálicos, a corrente troca de sentido quando a diferença de potencial é invertida, mas sua intensidade permanece a mesma.

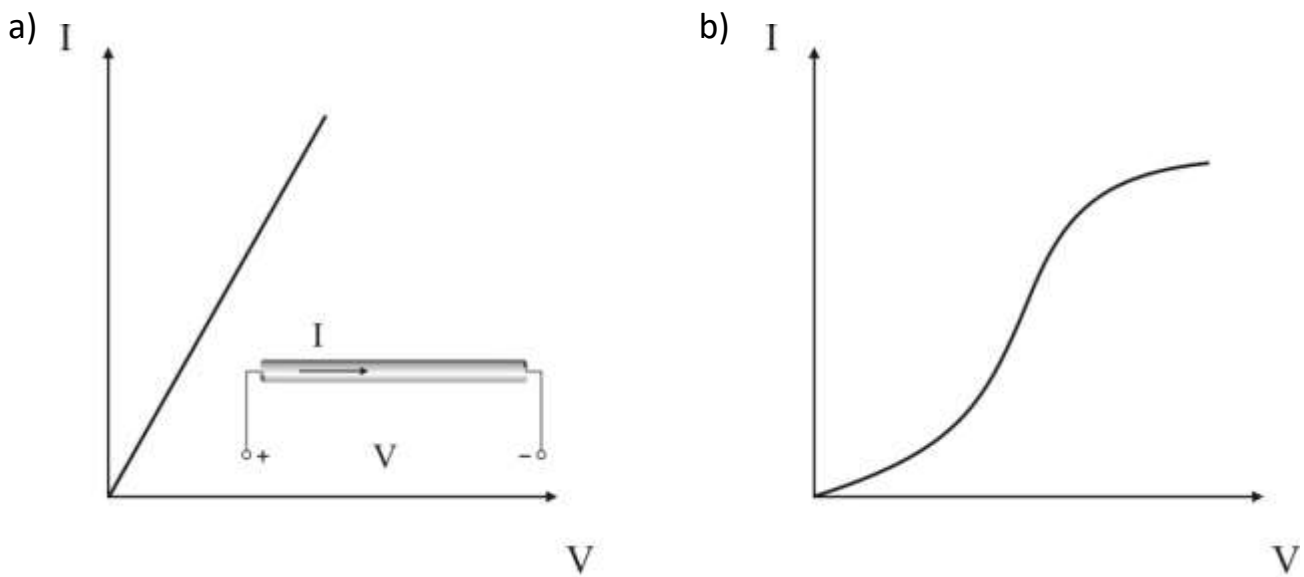
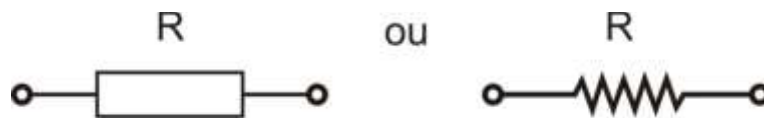


Figura 6.3

Os condutores que possuem resistência são chamados, também, resistores. Os símbolos convencionais dos resistores são:



Para um circuito fechado, composto por uma *f.e.m.* ε , com uma resistência interna r_0 e resistor externo R (Figura 6.4) a lei de Ohm é representada na forma

$$(R + r_0) = \frac{\varepsilon}{I}$$

ou

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r_0}, \quad (6.21)$$

onde $(R + r_0)$ é a resistência total do circuito, I é a corrente que circula neste circuito fechado.

Expressando de (6.20) a corrente I e substituindo em (6.21), obtemos a diferença de potencial

$$\frac{V}{R} = \frac{\varepsilon}{R + r_0}$$

ou

$$V = \frac{R}{R + r_0} \varepsilon. \quad (6.22)$$

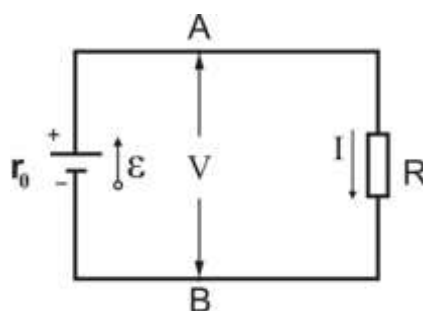


Figura 6.4

Se a resistência interna da fonte de *f.e.m.* é desprezível ou a resistência do circuito externo é muito grande, $r_0 \ll R$, então,

$$V \approx \varepsilon, \quad (6.23)$$

isto é, a diferença de potencial nos pólos do circuito e a *f.e.m.* da fonte, neste caso, coincidem.

Da fórmula (6.20) conclui-se que a unidade de resistência é a de um condutor pelo qual passa uma corrente de 1 ampère, sendo de 1 volt a diferença de potencial nos seus terminais. Esta unidade chama-se ohm (Ω). São usados com frequência, também, 1 k Ω (1 k Ω = $10^3\Omega$) e 1 M Ω (1 M Ω = $10^6\Omega$).

Foi obtido experimentalmente, que a resistência de um condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à área S da sua secção transversal:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (6.24)$$

Se l e S são iguais à unidade, então, a resistência desse condutor é igual a ρ . Por isso, ρ é chamado de resistência específica ou resistividade. No sistema *SI*, esta é a resistência de um condutor cujo comprimento é de 1 m e a área da secção transversal é de 1 m^2 , ou seja, um condutor em forma de cubo, cuja aresta é 1 m . Naturalmente que na prática isto não é cômodo, por isso ρ é definido mais frequentemente como a resistência de um fio de 1 m de comprimento e área transversal de 1 mm^2 . Na solução de problemas e nos cálculos teóricos é preciso saber em que unidade esta grandeza é dada e convertê-la em unidade do sistema *SI*, se necessário for. A unidade de resistência R é o ohm (símbolo Ω). Da expressão (6.24), obtemos a dimensão de ρ no sistema *SI*:

$$[\rho] = \frac{\text{Ohm} \cdot m^2}{m} = \text{Ohm} \cdot m.$$

A resistividade dos diferentes materiais varia muito, desde a pequena resistividade dos bons condutores, quando ρ é da ordem de 10^{-8} , por exemplo, a resistividade da prata é $1,64 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$, passando pela resistividade dos semicondutores, que é bem maior (a resistividade do carbono é $4 \cdot 10^{-5}$, a do germânio é $47 \cdot 10^{-2} \Omega \cdot m$) até a grande resistividade dos isolantes, da ordem de 10^{11} e 10^{12} , sendo a da mica de $5 \cdot 10^{11}$ e a do vidro $10^{12} \Omega \cdot m$.

A grandeza inversa de ρ , chamada de condutividade de uma substância, é simbolizada pela letra σ e mede-se em $(\Omega \cdot m)^{-1}$. A dependência entre a resistência específica e a temperatura t na escala Celsius foi estabelecida experimentalmente, e é dada pela seguinte expressão.

$$\rho = \rho_0 [1 + \bar{\alpha}(t - t_0)] , \quad (6.25)$$

onde ρ_0 é a resistividade a $0^\circ C$, $\bar{\alpha}$ é o valor médio do coeficiente de temperatura de resistividade no intervalo de temperatura $\Delta t = t - t_0$.

Se as relações obtidas forem utilizadas para a densidade de corrente, então encontramos o vínculo desta grandeza com a intensidade do campo. Com isso vamos ter em vista a superfície elementar normal a $\vec{E}$, através da qual passa a corrente I na direção do campo $\vec{E}$:

$$j dS = \frac{V}{\rho \frac{l}{dS}} \quad (6.26)$$

ou

$$j = \frac{1}{\rho} \frac{V}{l} = \sigma \frac{V}{l} . \quad (6.27)$$

A relação $\frac{V}{l}$ determina a intensidade do campo $\vec{E}$. Como os sentidos de $\vec{j}$ e $\vec{E}$ coincidem, a última relação é expressa na forma vetorial por:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} . \quad (6.28)$$

e chama-se lei de Ohm na forma diferencial, também conhecida como forma local da lei de Ohm. A lei de Ohm, representada pela expressão (6.21), foi publicada em 1827 pelo físico alemão Georg Simon Ohm (1789-1854). Entretanto, inicialmente, ela foi ignorada pelos pesquisadores da época. Só depois de alguns anos, o seu trabalho passou a ser valorizado e obteve o reconhecimento da comunidade científica.

CAPÍTULO 7

CIRCUITOS ELÉTRICOS COMPLEXOS. REGRAS DE KIRCHHOFF

Vejamos as associações de resistores em série (Figura 7.1) e em paralelo (Figura 7.2).

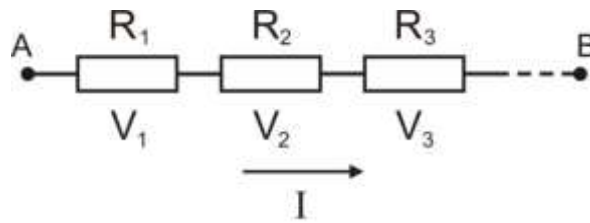


Figura 7.1

Seja criada a diferença de potencial (tensão) V entre os pontos A e B . Para a associação em série de resistores $R_1, R_2, \dots, R_n$ a diferença de potencial V é igual à soma das tensões em todas as resistências:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n. \quad (7.1)$$

A corrente I que passa pelo circuito é a mesma em cada um de seus ramos.

De acordo com a lei de Ohm, temos:

$$V_1 = I R_1; \quad V_2 = I R_2; \quad V_n = I R_n. \quad (7.2)$$

Para todo o circuito

$$V = I R. \quad (7.3)$$

Consequentemente,

$$I R = I R_1 + I R_2 + \dots + I R_n \quad (7.4)$$

de onde segue que a resistência total do circuito com associação em série é igual à soma das resistências de todos os ramos do mesmo:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i . \quad (7.5)$$

Notemos que da relação (7.2), temos:

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} = \dots = \frac{V_n}{R_n} . \quad (7.6)$$

ou

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2} \text{ etc,}$$

ou seja, a queda de potencial em cada ramo do circuito é proporcional à resistência desses ramos.

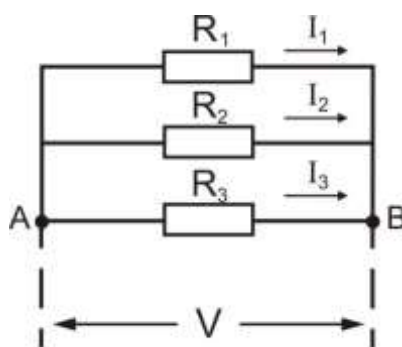


Figura 7.2

Para uma associação em paralelo de resistores, (Figura 7.2) a resistência total do circuito (entre os pontos A e B) é determinada com base na propriedade de que a queda de tensão V é a mesma para cada ramo (é a diferença de potencial entre A e B). Daqui, segue a seguinte fórmula:

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2 = \dots = I_n R_n . \quad (7.7)$$

A soma total da corrente, por definição, é igual à soma das correntes que passam por todos os ramos

$$I = \sum_{i=1}^n I_i ,$$

onde

$$I_i = \frac{V}{R_i} . \quad (7.8)$$

A lei de Ohm, aplicada ao sistema de resistores em paralelo, tem a forma :

$$RI = V , \quad (7.9)$$

onde R é a procurada resistência do sistema.

De (7.9) e (7.8), obtemos:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V}{\sum_i I_i} = \frac{V}{\sum_i \frac{V}{R_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}}. \quad (7.10)$$

Desta maneira,

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

ou

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (7.11)$$

Como consequência do resultado que acabamos de obter, de (7.7), encontramos:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \text{ etc,} \quad (7.12)$$

isto é, as correntes nos ramos (elementos) do circuito são inversamente proporcionais às resistências destes elementos. Essa propriedade da associação de condutores em paralelo é utilizada para a ligação dos shunts, que permitem obter a parte interessada da corrente total numa ramificação do esquema.

Mais complexo e muito importante na prática é o caso dos circuitos elétricos combinados, constituídos de fontes de força eletromotriz (*f.e.m.*) e resistências. Para o cálculo de parâmetros do circuito, quando as correntes são conhecidas, é cômodo utilizar as regras de Kirchhoff, devidas a Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887). Essas regras são consequências da lei da conservação da carga e da lei de Ohm. Em última análise, a segunda regra de Kirchhoff é consequência da lei da conservação da energia. É por isso que elas, em geral, não são chamadas de leis de Kirchhoff, mas simplesmente de regras de Kirchhoff. Entretanto, muitos autores as denominam de leis de Kirchhoff. É que, na física, a diferença entre uma lei e uma regra às vezes não é muito rígida.

7.1 PRIMEIRA REGRA DE KIRCHHOFF

A soma das correntes que entram (positivas) e que saem (negativas), em cada nó do circuito, é igual a zero (Figura 0.3).

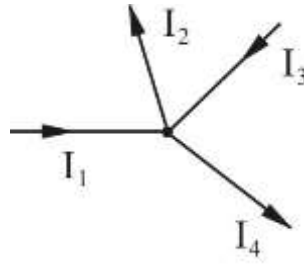


Figura 0.3

$$\sum_i I_i = 0. \quad (7.13)$$

Está claro que a lei da conservação das cargas é aplicável aos nós de qualquer circuito elétrico (a carga que entra é igual a que sai).

7.2 SEGUNDA REGRA DE KIRCHHOFF

Para qualquer malha de um circuito ramificado, a soma algébrica das quedas de tensão ($V_i = I_i R_i$) nos elementos dessa malha é igual à soma algébrica das *f.e.m.* na mesma malha (Figura 7.4):

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k. \quad (7.14)$$

Esta regra é a generalização da lei de Ohm para os circuitos ramificados.

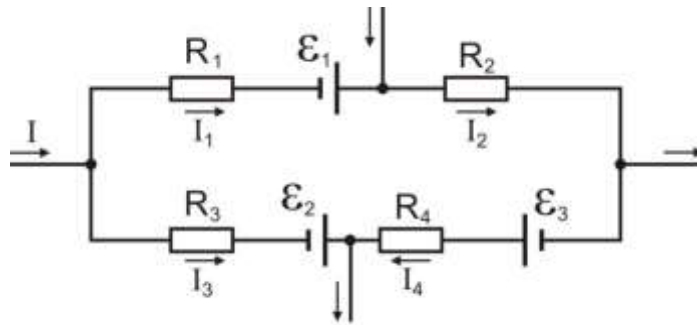


Figura 7.4

Examinemos um dos elementos do circuito com dada resistência R e uma *f.e.m.* ε (Figura 7.5).

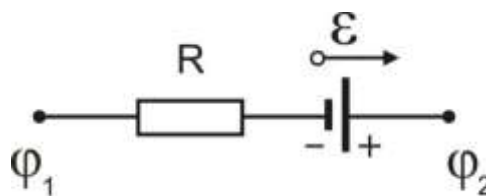


Figura 7.5

Vamos manter os potenciais φ_1 e φ_2 nos terminais deste elemento, então, de acordo com a lei de Ohm, temos:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \quad (7.15)$$

Consideremos um contorno fechado, que representa uma parte de um circuito complexo (Figura 7.6).

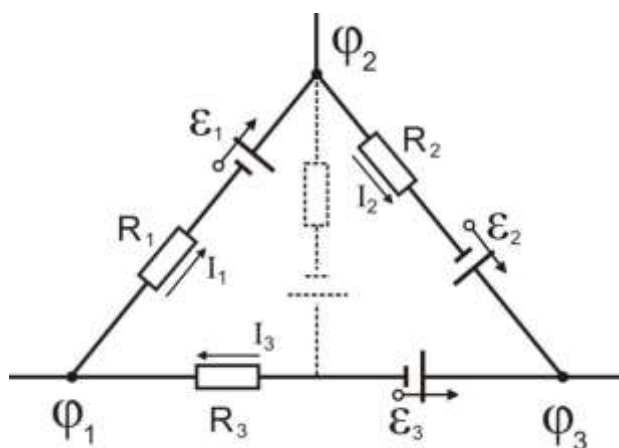


Figura 7.6

A influência daqueles elementos do circuito, com os quais está ligado o contorno, consiste em que nos nós são mantidos os potenciais φ_1, φ_2 e φ_3 . Para cada elemento, vamos escrever a relação (7.15)

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1 \\ I_2 R_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2 . \\ I_3 R_3 &= \varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_3 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Somemos todas estas igualdades. Os potenciais, com isso, anulam-se, mutuamente, e obtemos a segunda regra de Kirchhoff:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k . \quad (7.17)$$

Assim, é indiferente se dentro da malha existem outros elementos, por exemplo, a resistência e a *f.e.m.* pontilhada na Figura 7.6. Ao somar as equações do tipo (7.17) os potenciais nos nós se eliminam da soma final. Na solução de problemas com o uso das regras de Kirchhoff, é preciso prestar atenção nos sinais das correntes. Geralmente, toma-se o sentido da corrente num circuito fechado como

positivo no sentido horário e negativo no sentido contrário. Se na resposta obtém-se um valor negativo da corrente, para certo ramo do circuito, isto significa que ela passa no sentido anti-horário (naturalmente, se esta foi tomada como positiva, como ponto de partida para as equações do tipo (7.14)).

A *f.e.m.* é considerada positiva quando o seu sentido coincide com o sentido horário e, negativa, em caso contrário. O sentido da *f.e.m.* é do terminal negativo para o positivo.

Vamos examinar o esquema representando na Figura 7.7, tomado como exemplo.

São dadas R_1 , R_2 e R_3 , e também $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$. As correntes I_1 , I_2 e I_3 podem ser encontradas. Vamos considerar todas elas como positivas para o contorno ABD , então, no contorno BCD , a corrente I_3 é negativa.

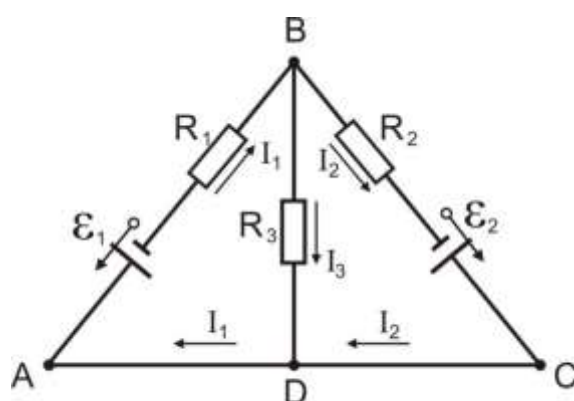


Figura 7.7

Obtemos o sistema de equações:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = -\mathcal{E}_1$$

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = \mathcal{E}_2$$

(segunda regra de Kirchhoff para dois contornos (7.17)) e também

$$I_1 = I_2 + I_3$$

(primeira regra de Kirchhoff para o ponto B (ou ponto D)). Desta forma, para encontrar três incógnitas, temos três equações.

Mencionemos uma variante de cálculo de esquemas complexos, o chamado **método dos potenciais nodais**. A sua utilização numa série de casos quando, por exemplo, exige-se determinar a queda de tensão (diferença de potencial) num dos ramos de um circuito, torna-se bastante razoável. Seja dado, por exemplo, o esquema representado na Figura 7.8. Aos pontos A e B é aplicada a diferença de potencial V . São dados os valores das resistências R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , e R_5 . É preciso encontrar

o valor de I_5 , ou o que é o mesmo, o valor da diferença de potencial $\varphi_2 - \varphi_3$, assim como

$$I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R}.$$

Para utilizar o método dos potenciais nodais, associamos a cada nó um potencial determinado pelas condições do problema. No ponto A o potencial é igual a φ , então, no ponto B o potencial é igual a 0. Nos pontos C e D os potenciais serão, correspondentemente, φ_2 e φ_3 .

Então,

$$I_1 = \frac{\varphi - \varphi_2}{R_1}, I_2 = \frac{\varphi_2 - 0}{R_2} = \frac{\varphi_2}{R_2}, I_3 = \frac{\varphi - \varphi_3}{R_3}, I_4 = \frac{\varphi_3 - 0}{R_4}, I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_5}. \quad (7.18)$$

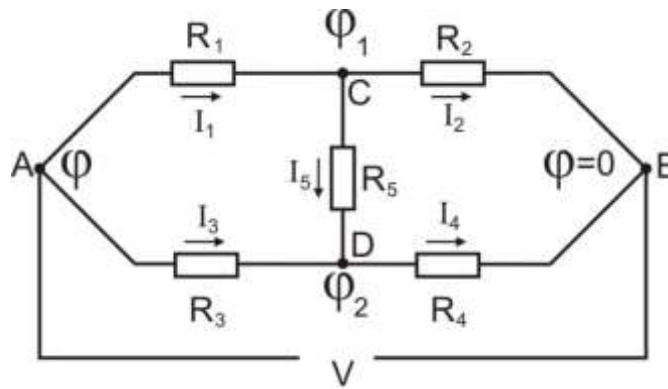


Figura 7.8

Pela primeira regra de Kirchhoff, temos:

$$I_1 = I_2 + I_5, \quad (7.19)$$

$$I_4 = I_3 + I_5.$$

Este sistema de sete equações permite encontrar as 5 correntes e 2 potenciais. Para encontrar, por exemplo, φ_2 e φ_3 , substituímos nas equações (7.19) os valores das correntes de (7.18)

$$\frac{\varphi - \varphi_2}{R_1} = \frac{\varphi_2}{R_2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_5}, \quad (7.20)$$

$$\frac{\varphi_3}{R_4} = \frac{\varphi - \varphi_3}{R_3} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_5}.$$

O sistema obtido, constituído de duas equações, tem duas incógnitas, φ_2 e φ_3 , ou seja, o problema reduz-se à forma algébrica simples. As equações (7.18) e (7.19) permitem também determinar a resistência total do circuito representado na Figura 7.9. Para isso, é preciso conhecer a corrente total que passa pelo circuito, ou seja, $I_1 + I_3$ (ou a igual a esta, que é $I_2 + I_4$) e a tensão V . Então,

$$R = \frac{V}{I_1 + I_3}. \quad (7.21)$$

Substituindo em (7.21) as correntes I_1 e I_3 de (7.18), obtemos a resistência total do circuito através das resistências R_1 , R_3 e da diferença de potencial nestes elementos $V_1 = \varphi - \varphi_2$ e $V_3 = \varphi + \varphi_3$,

$$R = \frac{R_1 R_2 V}{R_1 V_3 + R_3 V_1}.$$

Nos circuitos elétricos, encontramos associações em série e em paralelo (e suas combinações) não somente de condutores, mas de fontes de *f.e.m.* Associações em série de *f.e.m.* têm a *f.e.m.* igual à soma das *f.e.m.* de todas as fontes, pois o trabalho em todo o ramo é igual à soma dos trabalhos em cada parte deste e a *f.e.m.* é o trabalho para a deslocação de uma carga unitária entre os pólos da fonte. Vejamos uma associação de fontes em paralelo. Qual é a *f.e.m.* e a resistência interna de duas fontes com *f.e.m.* dadas $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ e resistências internas r_1 e r_2 , se a associação é feita de acordo com o esquema da Figura 7.9.

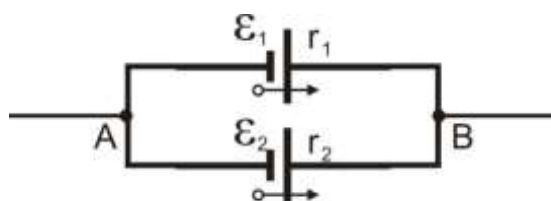


Figura 7.9

A *f.e.m.* que produz a corrente no circuito, a diferença de potencial nos pontos A e B, será igual à diferença de *f.e.m.* das fontes. Consequentemente, pelo circuito AB passa a corrente I_0 , grandeza que é determinada pela diferença de potencial e pela resistência $r_1 + r_2$:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}. \quad (7.22)$$

Se no circuito for ligada a resistência R (Figura 7.10), então, utilizando a regra de Kirchhoff, para o ponto A e as malhas ADBA e ACBA, obtemos as equações:

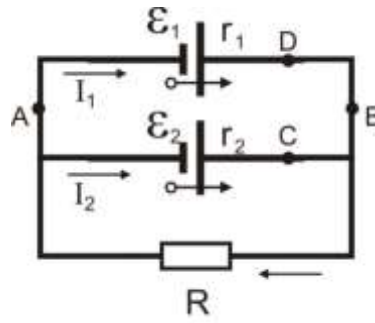


Figura 7.10

$$I = I_1 + I_2 ,$$

$$IR + I_2 r_2 = \varepsilon_2 , \quad (7.23)$$

$$IR + I_1 r_1 = \varepsilon_1 ,$$

onde I é a corrente que passa pela resistência R . Das equações (7.23) encontramos o valor desta corrente:

$$I = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{Rr_1 + Rr_2 + r_1 r_2} . \quad (7.24)$$

Ao escrever esta relação na seguinte forma

$$I = \frac{\frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{\varepsilon}{R + r_0} , \quad (7.25)$$

encontramos a *f.e.m.* e a resistência interna r_0 do sistema:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2} , \quad r_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} . \quad (7.26)$$

Se $r_1 = r_2$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, temos $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ e

$$r_0 = \frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{2} . \quad (7.27)$$

Generalizando para n elementos, concluímos que a resistência interna de uma bateria de n fontes idênticas ligadas em paralelo é n vezes menor que a resistência interna de uma delas e a *f.e.m.* da bateria é igual à *f.e.m.* de uma fonte isolada.

CAPÍTULO 8

LEI DE JOULE-LENZ. RENDIMENTO DE UMA FONTE DE CORRENTE. NATUREZA ELETRÔNICA DA CONDUTIVIDADE DOS METAIS

Examinemos a ação térmica da corrente. O movimento das cargas nos condutores de corrente sob a ação de uma diferença de potencial V é conjugado com a superação da resistência dos condutores: os portadores de cargas em movimento chocam-se com as partículas do condutor transmitindo a estas suas energias cinéticas adquiridas no campo elétrico, aumentando assim a energia do movimento térmico.

O trabalho realizado pelo campo, para o deslocamento da carga dq , de um ponto do condutor a outro, entre os quais a diferença de potencial é V , é definido pela relação:

$$dW = V dq . \quad (8.1)$$

Vamos substituir, nesta igualdade, a grandeza V expressa pela lei de Ohm:

$$V = RI . \quad (8.2)$$

a grandeza $dq = I dt$.

Então,

$$dW = RI I dt = RI^2 dt .$$

Daqui obtemos o valor do trabalho W realizado pela corrente, que é igual à energia térmica Q adquirida pelo condutor:

$$W = \int_0^t RI^2 dt .$$

Para a corrente contínua, temos:

$$W = Q = RI^2 t . \quad (8.3)$$

Esta relação é conhecida na física como lei de Joule-Lenz. Ela foi estabelecida, independentemente, por James Prescott Joule (1818-1889) e por Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865).

De (8.3) pode ser encontrada a potência da corrente:

$$P = \frac{W}{t} = R I^2. \quad (8.4)$$

A última relação pode ser escrita de várias formas, dependendo do parâmetro por meio do qual é preciso expressar a potência:

$$P = R I^2 = V I = \frac{V^2}{R}. \quad (8.5)$$

Vamos introduzir o conceito de potência específica, ou seja, a potência por unidade de volume do condutor (v):

$$p = \frac{P}{v} = \frac{V^2}{R v}. \quad (8.6)$$

Vamos expressar R através da condutividade específica (ou condutividade) σ :

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S}; \quad v = S l, \rho = \frac{1}{\sigma}, \quad p = \frac{V^2 \sigma S}{l S l} = \frac{V^2 \sigma}{l^2}. \quad (8.7)$$

A razão $\frac{V}{l}$, por definição, é a intensidade do campo $\vec{E}$, consequentemente,

$$p = \sigma E^2 \quad \text{ou} \quad p = \rho j^2. \quad (8.8)$$

Esta relação tem o nome de lei de Joule-Lenz na forma diferencial ou forma local.

As fórmulas (8.3) e (8.8) permitem fazer a avaliação quantitativa da ação térmica da corrente. A fonte de *f.e.m.* ligada ao consumidor de corrente, perde energia que se desprende nos condutores do consumidor de corrente na forma de calor. Contudo, a corrente num circuito elétrico circula somente no caso do circuito ser fechado, ou seja, quando a própria fonte com sua resistência interna é um dos elementos do circuito. Vamos encontrar a relação entre a potência total perdida pela fonte, cuja *f.e.m.* é $\mathcal{E}$, tendo em conta a sua resistência interna r_0 e a potência desprendida na resistência de carga. Vamos simbolizar por P_t a potência total desprendida pela fonte:

$$P_t = \varepsilon I . \quad (8.9)$$

A potência desprendida na resistência de carga simbolizemos por P_R :

$$P_R = V I . \quad (8.10)$$

A razão $\frac{P_R}{P_t}$ tem o nome de rendimento da fonte de corrente (símbolo η).

De (8.9) e (8.10) segue que

$$\eta = \frac{V}{\varepsilon} . \quad (8.11)$$

A relação entre ε e V já é conhecida (ver fórmula (7.3)):

$$V = \varepsilon \frac{R}{r_0 + R} . \quad (8.12)$$

daqui, segue

$$\eta = \frac{R}{r_0 + R} . \quad (8.13)$$

Agora, vamos encontrar a condição de máximo da grandeza P_R , ou seja, vamos determinar qual é a relação entre R e r_0 para que a potência na resistência de carga seja máxima, sendo que r_0 é dada.

Vamos encontrar a condição de máximo da expressão:

$$P_R = V I = \varepsilon \frac{R}{r_0 + R} I = \frac{\varepsilon^2 R}{(r_0 + R)(r_0 + R)} . \quad (8.14)$$

Para isto, vamos igualar a zero a derivada da expressão (8.14) em relação a R :

$$\frac{d}{dR} \left(\varepsilon^2 \frac{R}{(r_0 + R)^2} \right) = 0 , \quad (8.15)$$

ou

$$\frac{1}{(r_0 + R)^2} - \frac{2R}{(r_0 + R)^3} = 0,$$

ou seja;

$$1 - \frac{2R}{r_0 + R} = 0.$$

A relação procurada tem a forma:

$$r_0 = R, \quad (8.16)$$

isto é; a potência desprendida na resistência de carga é máxima se a resistência R é igual à resistência interna da fonte, aqui representada por r_0 . Quando se cumpre esta condição tem-se o que se chama concordância de resistência.

Notemos que a condição $R = r_0$ define a possibilidade de obter-se de uma dada fonte a potência máxima. Contudo, neste caso, o rendimento é igual a 0,5, isto é; a mesma potência é gasta na fonte.

O rendimento máximo tem valor próximo à unidade como se conclui da fórmula (8.13), quando $R \gg r_0$, por isso, na prática, tende-se fazer com que a resistência interna da fonte seja o quanto menor possível.

As leis da corrente elétrica analisadas por nós podem ser explicadas no âmbito da teoria clássica dos gases ideais. Esta teoria descreve, aproximadamente, o fenômeno da condutividade elétrica, da ação térmica da corrente e estabelece a ligação entre a condutividade elétrica e a condutividade térmica dos metais.

Ela parte da proposição de que se aplica as leis da física molecular aos elétrons livres do condutor de corrente. Os metais estão incluídos neste tipo de condutores..

Os elétrons do metal em movimento livre e caótico, de acordo com as concepções desta teoria, formam o chamado “gás eletrônico”.

A confirmação experimental da origem eletrônica da condutibilidade metálica encontramos nas experiências de Riecke (1901). Ele deixou passar durante um intervalo longo de tempo (cerca de 1 ano) uma corrente através de um circuito composto de diferentes metais. Uma pesagem exata mostrou que o peso de cada condutor metálico utilizado na experiência foi conservado, ou seja, com a passagem da corrente não houve transformação de partículas ponderáveis da substância.

As experiências mais convincentes que estabeleceram a natureza eletrônica da corrente foram as experiências de Tolman e Stewart, realizadas em 1916. Estes pesquisadores puseram em rotação rápida um solenoide cujo fio tinha um comprimento de 500m, alcançando a velocidade linear das espiras de cerca de 300m/s. Depois de uma frenagem brusca, as partículas carregadas do metal continuaram em movimento por inércia. Surgia uma corrente. Com o auxílio de um galvanômetro balístico pode-se

medir a carga que passava pelo circuito durante o tempo de frenagem e encontrar a razão entre a carga e a massa $\frac{e}{m}$. Examinemos este processo num exemplo mais simples do movimento e da frenagem de um bloco metálico (Figura 8.1). Durante o movimento do bloco com velocidade v_0 , juntamente com este, as partículas livres carregadas movem-se com mesma velocidade (além disso, naturalmente, elas participam no movimento térmico). Com a frenagem brusca, estas partículas continuam em movimento. Num sistema de coordenadas ligado ao bloco, as partículas entram em movimento ordenado retardado com aceleração a (a aceleração é negativa).

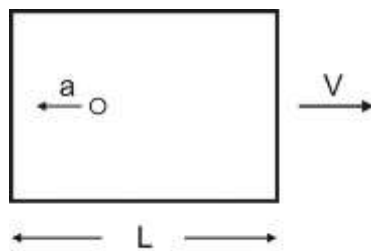


Figura 8.1

A aceleração das partículas pode ser produzida pela força elétrica eE (produto da carga pela intensidade do campo).

Qual é a intensidade do campo necessária para isto? O retardamento mecânico é criado, de acordo com a 2ª lei de Newton, pela força:

$$F = -ma . \quad (8.17)$$

Esta grandeza deve ser igual à força elétrica necessária para produzir o mesmo retardamento:

$$eE = -ma . \quad (8.18)$$

Vamos exprimir a intensidade do campo $\vec{E}$ por meio da diferença de potencial aplicada a um bloco de comprimento L :

$$\vec{E} = \frac{V}{L} . \quad (8.19)$$

De (8.18) e (8.19), obtemos:

$$V = -\frac{maL}{e} . \quad (8.20)$$

Vamos relacionar esta diferença de potencial com a corrente que passará pelo bloco (lei de Ohm):

$$I = \frac{V}{R} = \frac{-maL}{Re} . \quad (8.21)$$

Durante o tempo dt , através da secção do bloco passará a carga :

$$dq = I dt = -\frac{maL}{Re} dt . \quad (8.22)$$

Como $a.dt$ é a variação da velocidade, vamos fazer a substituição:

$$a . dt = dv .$$

Então, a carga que passou pelo bloco, durante o tempo de frenagem, expressa-se pela integral:

$$q = -\int_{v_0}^0 \frac{mL}{Re} dv = \frac{m}{e} \frac{Lv_0}{R} . \quad (8.23)$$

Medindo-se q , v_0 , conhecendo L e R , pode-se encontrar o valor procurado $\frac{e}{m}$ (carga específica).

Ao concluirmos que os elétrons são os portadores da corrente nos metais, vamos aplicar a eles as relações estatísticas introduzidas para as moléculas de um gás, no curso de Física molecular.

Antes de tudo, calculemos o valor médio da velocidade do movimento térmico das partículas do gás eletrônico:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}} . \quad (8.24)$$

onde $k = 1,38.10^{-23} \frac{J}{K}$ (constante de Boltzmann), $m = 9,1.10^{-31} kg$ (massa do elétron). Para a temperatura absoluta, $T = 300K (+27^{\circ}C)$, por exemplo, temos:

$$\bar{u} = \frac{10^5 m}{s} . \quad (8.25)$$

Comparemos esta velocidade com a velocidade do movimento ordenado destas partículas sob a ação do campo elétrico, ou seja, com a velocidade que determina a densidade de corrente, de acordo com a fórmula (7.3). Simbolizando esta velocidade por v , temos:

$$j = nev . \quad (8.26)$$

Qual é a densidade máxima da corrente $j_{máx}$ nos metais?

A experiência mostra que os metais podem suportar uma densidade de corrente, cujo valor é de aproximadamente $\frac{10^7 A}{m^2}$; valores superiores a este causam a desintegração do metal. Consequentemente,

$$v_{máx} = \frac{j_{máx}}{ne} = \frac{10^7}{ne} . \quad (8.27)$$

Vamos considerar o número de elétrons por unidade de volume igual à quantidade de moléculas (átomos) da substância. Esta grandeza pode ser expressa por meio do número de Avogadro N_A , da massa molar μ e da densidade d :

$$n = \frac{N_A}{\mu} d . \quad (8.28)$$

Como exemplo, vamos tomar certos valores médios de μ e d , característicos para os metais:

$$\mu \sim 10^2 \frac{kg}{kmol} ; \quad d \sim 10^4 \frac{kg}{m^3} . \quad (8.29)$$

Substituindo estes valores com $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} kmol^{-1}$, encontramos:

$$n \approx 10^{28} m^{-3} . \quad (8.30)$$

A carga do elétron é igual a $1,6 \cdot 10^{-19} C$, consequentemente,

$$v_{máx} \cong \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{28}} \sim 10^{-2} \frac{m}{s} . \quad (8.31)$$

Comparando $v_{máx}$ com o valor da velocidade térmica $u \sim 10^5 \frac{m}{s}$, vemos que a velocidade térmica caótica das partículas do gás eletrônico é 10^7 vezes maior que a velocidade do seus movimentos

ordenados. Consequentemente, nos cálculos da energia cinética destas partículas (elétrons), a velocidade dos seus movimentos ordenados pode ser desprezada. Logo, sua energia cinética é determinada pela fórmula:

$$\overline{U_c} = \frac{m\overline{u^2}}{2}. \quad (8.32)$$

CAPÍTULO 9

TEORIA CLÁSSICA DA CONDUTIVIDADE ELÉTRICA DOS METAIS

Vamos aplicar as conclusões da teoria cinética dos gases ao “gás eletrónico” nos metais e obter as leis da corrente elétrica, que nós já formulamos anteriormene.

Com o movimento, sob a ação do campo E , os elétrons do metal sofrem colisões. Diferentemente dos gases, com suas moléculas colidindo entre si, aqui essas colisões ocorrem entre os elétrons e os átomos da rede cristalina. Vamos introduzir o tempo entre as colisões τ e definimo-lo como a razão entre o comprimento do caminho livre percorrido λ e a velocidade média do movimento térmico $\bar{u}$:

$$\tau \sim \frac{\lambda}{\bar{u}}. \quad (9.1)$$

O carácter aproximado desta relação consiste no fato de que nós não consideramos a distribuição das partículas segundo as velocidades e não levamos em conta a velocidade do movimento ordenado (ela é 10^7 vezes menor que a velocidade térmica).

Sob a ação do campo E os elétrons adquirem uma aceleração a :

$$a = \frac{eE}{m}. \quad (9.2)$$

Antes da colisão, cada elétron atinge a velocidade máxima do movimento ordenado, cujo valor médio define-se pela igualdade:

$$\bar{v}_{\text{máx}} = a\tau, \quad (9.3)$$

ou

$$\bar{v}_{\text{máx}} = \frac{eE}{m}\tau. \quad (9.4)$$

Substituindo τ da relação (9.1), encontramos:

$$\bar{v}_{m\acute{a}x} = \frac{eE}{mu} \lambda . \quad (9.5)$$

Conhecendo $\bar{v}_{m\acute{a}x}$, determinemos a velocidade média do movimento ordenado como a metade da velocidade máxima:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \bar{v}_{m\acute{a}x} = \frac{eE\lambda}{2mu} . \quad (9.6)$$

Substituindo este valor na expressão para a densidade de corrente j (ver fórmula (7.3)), encontramos:

$$j = ne\bar{v} = \frac{ne^2\lambda}{2mu} E . \quad (9.7)$$

Comparando esta expressão com a expressão da lei de Ohm na forma diferencial, verificamos as suas identidades:

$$j = \sigma E = \left(\frac{ne^2\lambda}{2mu} \right) E . \quad (9.8)$$

Desta forma, não somente obtemos a relação que liga j e E , mas determinamos a condutividade elétrica σ :

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mu} . \quad (9.9)$$

Voltemos agora para a lei de Joule-Lenz e tentemos chegar ao seu conteúdo físico, com base nas concepções da teoria cinética do movimento ordenado da partícula (elétron) antes da colisão, isto é; naquele instante quando ela adquiriu a velocidade máxima do movimento ordenado:

$$U_c^0 = \frac{m\bar{v}_{m\acute{a}x}^2}{2} . \quad (9.10)$$

Substituindo $\bar{v}_{m\acute{a}x}$ de (9.5), obtemos:

$$U_c^0 = \frac{m}{2} \frac{e^2 \lambda^2}{m^2 u^2} E^2 = \frac{e^2 \lambda^2}{2 m u^2} E^2. \quad (9.11)$$

Encontremos a energia cinética das partículas por unidade de volume:

$$U_c' = n U_c^0. \quad (9.12)$$

Por unidade de tempo, como resultado das colisões, a energia cinética do movimento ordenado passa à energia do movimento térmico, na seguinte quantidade:

$$p_c = \frac{U_c'}{\tau}, \quad (9.13)$$

onde τ é o tempo entre os choques,

$$\tau = \frac{\lambda}{u}. \quad (9.14)$$

Substituindo em (9.13) esse valor de τ e considerando as fórmulas (9.11) e (9.12), encontramos:

$$p_c = \frac{n \bar{u}}{\lambda} U_c' = \frac{n e^2 \lambda}{2 m \bar{u}} E^2. \quad (9.15)$$

A relação obtida é a expressão da lei de Joule-Lenz na forma diferencial e coincide com a fórmula (9.8), já obtida no capítulo anterior:

$$p = \sigma E^2. \quad (9.16)$$

Diferentemente dessa fórmula, a fórmula (9.15) nos permite encontrar o valor da condutividade específica de um metal, da mesma forma que podíamos fazer isso antes ao obter a expressão da lei de Ohm.

A comparação das fórmulas (9.9) e (9.15) mostra que, em ambos os casos, o valor de σ é expresso da mesma forma, por meio do número de partículas por unidade de volume n , da carga e , da distância percorrida livremente λ , da massa m e da velocidade média do movimento térmico $\bar{u}$:

$$\sigma = \frac{n e^2 \lambda}{2 m u} . \quad (9.17)$$

Voltemos agora à questão de como estão relacionados entre si a condutividade elétrica e a condutividade térmica dos metais. Os físicos alemães Gustav Wiedemann (1826-1898) e Rudolf Franz (1826-1902), em 1853, com base na generalização dos experimentos práticos relativos a esse problema, formularam a chamada lei de Wiedemann-Franz: a razão do coeficiente de condutividade térmica χ pela condutividade elétrica específica σ , para todos os metais, é aproximadamente a mesma e varia proporcionalmente com a temperatura absoluta.

Notemos que Wiedemann e Franz obtiveram esta lei por métodos experimentais; para os metais, ela descreve, apenas aproximadamente, a relação entre χ e σ .

Para alguns metais (berílio, manganês) ela não se cumpre de forma alguma.

Para as baixas temperaturas, o desvio dessa lei é consideravelmente grande. Isso acentua a limitação das concepções clássicas sobre os processos físicos nos metais. Contudo, essas concepções permitem deduzir a lei de Wiedemann-Franz, analogamente àquela que foi feita para as leis de Ohm e Joule-Lenz.

Nos cursos de física molecular, podemos obter a seguinte expressão para o coeficiente de condução de calor:

$$\chi = \frac{1}{3} n m \bar{u} \lambda c_v . \quad (9.18)$$

Nesta expressão entra a capacidade térmica específica (c_v) a volume constante. Para um gás monoatômico (elétrons de um metal), essa capacidade térmica é definida pela constante universal dos gases R e pela massa molar μ :

$$C_v = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} . \quad (9.19)$$

Substituindo $R = k N_A$, obtemos:

$$C_v = \frac{3}{2} k \frac{N_A}{\mu} . \quad (9.20)$$

Notemos que a grandeza $\frac{\mu}{N_A}$ é igual à massa da partícula, temos:

$$C_v = \frac{3}{2} \frac{k}{m}, \quad (9.21)$$

então,

$$\chi = \frac{1}{3} n m \bar{u} \lambda \frac{3}{2} \frac{k}{m} = \frac{1}{2} k n \bar{u} \lambda. \quad (9.22)$$

Tomemos a razão de χ por σ (σ é expresso pela fórmula (9.17)):

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{\frac{1}{2} n k \bar{u} \lambda}{n e^2 \frac{\lambda}{2 m \bar{u}}} = \frac{k m \bar{u}^2}{e^2}. \quad (9.23)$$

Utilizemos a relação fundamental da teoria cinética dos gases (para o gás monoatômico, isto é gás cujas partículas possuem três graus de liberdade):

$$\frac{m \bar{u}^2}{2} = \frac{3}{2} k T, \quad (9.24)$$

onde k é a constante de Boltzmann, T a temperatura absoluta.

Consequentemente,

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{3 k^2 T}{e^2} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T. \quad (9.25)$$

o que é a expressão matemática da lei de Wiedemann-Franz.

Este resultado, com base na teoria cinética dos gases, foi obtido por Paul Drude (1863-1906), em seu modelo proposto, para descrever as propriedades térmicas, elétricas e ópticas dos metais. O coeficiente $3 \frac{k^2}{e^2}$ é chamado de número de Lorenz, em homenagem ao físico dinamarquês Ludvig Valentin Lorenz (1826-1891). Este coeficiente é usualmente representado por L . Portanto, podemos escrever a lei de Wiedemann-Franz na forma: $\frac{\chi}{\sigma} = LT$.

Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951), utilizando métodos mais refinados, com base em uma análise quântica do fenômeno de condutividade, encontrou $L = \frac{\pi^2}{3} \frac{k^2}{e^2} = 2,44 \cdot 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}$, enquanto L obtido pelo procedimento clássico de Drude é um pouco menor: $L = 2,23 \cdot 10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}$.

A análise das expressões obtidas para as características dos metais mostra a limitação das concepções aceitas como base das suas deduções.

Voltemos nossa atenção para a fórmula da condutividade:

$$\sigma = \frac{n e^2 \lambda}{2 m \bar{u}}. \quad (9.26)$$

Nessa fórmula entra a velocidade média do movimento térmico $\bar{u}$. Dos cursos de física molecular, mais precisamente da teoria cinética dos gases, sabemos que ela é proporcional à raiz quadrada da temperatura absoluta:

$$\bar{u} = \sqrt{T}. \quad (9.27)$$

Consequentemente,

$$\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad (9.28)$$

ou seja; a resistência do condutor ρ deve ser proporcional a $\sqrt{T}$. Na realidade, como mostra a experiência, a resistência de um condutor é proporcional a T (ver fórmula (7.25)). A segunda dificuldade da teoria consiste da explicação do seguinte fato: de acordo com a concepção do “gás eletrônico”, nos metais, a sua capacidade térmica deve ser de 1,5 vezes maior que a capacidade térmica dos não-metais. Na realidade, a energia térmica média do elétron, de acordo com a concepção analisada, é expressa pela grandeza

$$\bar{U}_{el} = \frac{3}{2} k T. \quad (9.29)$$

A energia de um quilo-átomo é:

$$\bar{U} = N_A \frac{3}{2} k T = \frac{3}{2} R T. \quad (9.30)$$

Daqui, obtém-se a capacidade térmica do “gás eletrônico”, fazendo a derivada desta última expressão pelo tempo, encontramos

$$\frac{d\bar{U}}{dT} = \frac{3}{2} R, \quad (9.31)$$

ou seja, ele é igual à capacidade térmica de um gás ideal.

Nos cursos da física molecular estabelece-se que a capacidade térmica de um corpo sólido, representado por uma rede cristalina, mono-molecular, é igual a 3R. Daqui, segue a conclusão de que a capacidade térmica dos metais é definida pela grandeza:

$$\left(3 + \frac{3}{2}\right)R, \quad (9.32)$$

isto é; realmente 1,5 vezes maior que a capacidade térmica dos não-metais. Na realidade isso não ocorre.

A lei de Dulong e Petit, como se sabe, estabelece que a capacidade térmica $3R$ caracteriza um corpo sólido de estrutura cristalina. Consequentemente, a concepção do “gás eletrônico” (associando aos elétrons livres de um metal as propriedades das partículas de um gás ideal) na aplicação para o cálculo da capacidade térmica não é confirmada pelos experimentos: os elétrons não tomam uma participação na absorção de calor como fazem as partículas de um gás ou a rede cristalina.

A explicação dessas importantes diferenças é dada na teoria quântica dos metais. Ela leva em conta a distribuição dos elétrons pelos níveis eletrônicos e mostra que o movimento térmico influi apenas no valor da energia cinética com uma pequena parte dos elétrons, que entram na estrutura cristalina.

CAPÍTULO 10

CAMPO MAGNÉTICO DA CORRENTE ELÉTRICA

O físico e químico dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1851) em 1820 era professor na Universidade de Copenhague. Fazia alguns anos que ele já vinha estudando a relação entre magnetismo e eletricidade. Oersted, que tinha alguma simpatia pela *Naturphilosophie* dos filósofos românticos alemães e sofreu influência da filosofia de Kant, acreditava sobretudo na unidade da natureza. Ele esperava que deveria existir alguma relação profunda entre magnetismo e eletricidade, mas essa relação ainda não havia sido detectada. Durante uma aula de eletricidade, galvanismo e magnetismo na primavera daquele ano, ele observou que uma bússola colocada paralela a um circuito de corrente contínua havia se desviado de sua direção norte-sul. Experimentos desse tipo foram repetidos por Oersted e, inclusive, ele constatou que a orientação do desvio da bússola era alterada, caso a corrente passasse a ter um sentido contrário. Em 21 de julho do mesmo ano ele publicava um artigo contendo os resultados de seus experimentos, que indicavam existir uma relação profunda entre a eletricidade e o magnetismo. Esse artigo causou grande sensação na comunidade científica europeia da época, pois se tratava de uma novidade marcante, visto que ninguém antes havia observado um efeito dessa natureza.

Na França, André Marie Ampère (1775-1836) repetiu os experimentos de Oersted e, em seguida, procurou dar um tratamento matemático adequado ao fenômeno da relação entre eletricidade e magnetismo. Ampère foi um cientista versátil. Ele publicou artigos sobre diversos assuntos: cálculo, química, zoologia e física. Ele chegou a propor uma explicação para o fenômeno do magnetismo, como sendo devido às correntes elétricas moleculares internas da substância. Portanto, de acordo com Ampère, a eletricidade era um fator primário, e o magnetismo de uma bússola, por exemplo, um efeito secundário dessas correntes moleculares. O termo “eletrodinâmica” foi introduzido na ciência por Ampère. A contribuição de Ampère para a eletricidade e o magnetismo foi tão grande, que décadas mais tarde, Maxwell chegou a chama-lo de “Newton da eletricidade”.

Dois condutores portadores de corrente interagem entre si. Experimentalmente, foi estabelecido por Ampère em 1820 que condutores paralelos com o mesmo sentido das correntes se atraem; com sentidos contrários se repelem (Figura 10.1).

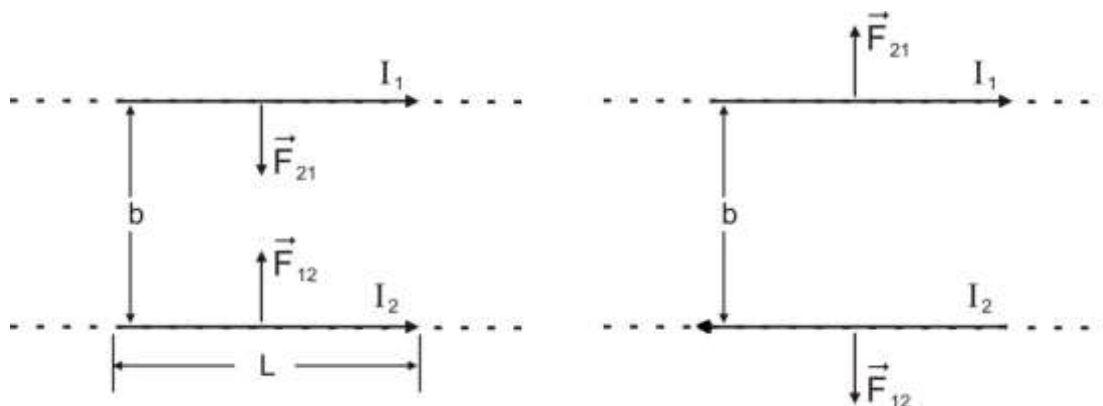


Figura 10.1

Como a força de interação pode ser devidamente medida, estabelece-se assim a sua dependência do valor das correntes (I_1, I_2) e da distância (b) entre os fios. Essa dependência é expressa pela força que passou a se chamar de força de Ampère, que é a força de interação por unidade de comprimento entre duas correntes paralelas, e que é diretamente proporcional ao valor das correntes e inversamente proporcional à distância entre os condutores.

Empregando os termos “correntes paralelas”, “correntes retilíneas” etc., nós naturalmente temos em vista, aqui, condutores com corrente. Contudo, o que foi dito relaciona-se, também, com as cargas livres em movimento. Vamos escrever a expressão matemática da força de Ampère:

$$F = k \frac{I_1 I_2 L}{b}. \quad (10.1)$$

Essa fórmula permite dar a definição de unidade de corrente, de modo análogo como a lei de Coulomb fornece a definição de unidade de carga. O sistema de unidades no qual a força é medida em dinas, a distância em centímetros, o coeficiente k é tomado igual a 2 (a comodidade da introdução desse coeficiente será mostrada um pouco mais tarde) tem o nome de *CGSM*. A unidade de corrente nesse sistema, como se conclui do que foi dito, é a corrente retilínea que interage com uma corrente idêntica distante de 1 cm com uma força de 2 dinas. Essa unidade de corrente não possui nome especial (unidade *CGSM*, unidade eletromagnética absoluta).

Dessa maneira, no sistema *CGSM*, a lei de Ampère tem a forma:

$$F = \frac{2I_1 I_2 L}{b}. \quad (10.2)$$

Analogamente, como já foi feito no Capítulo 6, para expressar a unidade de corrente, o ampère, definida no sistema SI, é possível também definir a unidade de corrente por meio da unidade de carga no sistema *CGSE*: uma unidade de carga *CGSE* que passa por um segundo através de uma secção reta de um condutor constitui uma unidade de corrente no sistema *CGSE*.

$$1 \text{ unidade de corrente CGSE} = \frac{\text{unidade de carga CGSE}}{1 \text{ segundo}}. \quad (10.3)$$

Foi estabelecido, experimentalmente, que uma unidade de corrente determinada pela força de Ampère (isto é, a unidade CGSM) é igual a $3 \cdot 10^{10}$ unidades CGSE. Notemos que esta grandeza representa o valor da velocidade da luz no vácuo, o que não é aleatório e encontra explicação na teoria estrita do eletromagnetismo. Conhecendo essa relação, encontramos a quantos ampères é igual uma unidade de corrente no CGSM.

$$1 \text{ ampère} = \frac{1 \text{ coulomb}}{\text{segundo}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ unidades CGSE}}{1 \text{ segundo}},$$

$$1 \text{ unidade CGSM} = 3 \cdot 10^{10} \text{ unidades CGSE}, \quad (10.4)$$

$$1 \text{ ampère} = \frac{1}{10} \text{ unidade CGSM},$$

ou

$$10\text{A} = 1 \text{ unidade CGSM}.$$

Agora, é fácil obter a expressão matemática da **força de Ampère** no sistema SI. Para isso, vamos introduzir o coeficiente k_m e encontrar o seu valor numérico:

$$F = k_m \frac{2I_1 I_2 L}{b}. \quad (10.5)$$

Se $I_1 = I_2 = 1$ unidade de CGSM, $b = 1 \text{ cm}$, então, $F = 2$ dinas por cm . Tomemos esses valores das correntes, da força e da distância do sistema SI, isto é, introduzimos Ampères, metros e newtons:

$$2 \cdot 10^5 = k_m \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} \quad (10.6)$$

de onde, obtemos $k_m = 10^{-7}$. Da fórmula (10.6), obtemos que duas correntes de 1 ampère na distância de 1 metro interagem com uma força de $2 \cdot 10^{-7}$ newtons por metro:

$$\frac{F}{L} = k_m \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N / m}. \quad (10.7)$$

Logo, a unidade de corrente, o ampère, define-se como uma corrente linear que atua numa corrente idêntica a ela na distância de 1 metro com força $2 \cdot 10^{-7}$ newtons por metro de comprimento. Determinemos a dimensão de k_m :

$$[k_m] = \frac{N}{m} \frac{m}{A^2} = \frac{N}{A^2} = \frac{Ns}{CA} = \frac{Vs}{mA}. \quad (10.8)$$

Como consequência de que no sistema SI na qualidade de unidades fundamentais são usadas as unidades práticas, as relações entre os sistemas de unidades, estabelecidos na eletrotécnica e as expressões das leis do eletromagnetismo, incluem os coeficientes introduzidos historicamente, por exemplo, 4π na lei de Coulomb.

De forma análoga à lei de Coulomb, a força de Ampère no sistema SI também inclui esse coeficiente: no lugar do coeficiente k_m , na fórmula da força de Ampère introduz-se o coeficiente μ_0 , chamado permeabilidade magnética do vácuo.

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{mA}. \quad (10.9)$$

A força de Ampère pode ser representada pela expressão:

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 L}{b}. \quad (10.10)$$

Notemos que a expressão (10.10) determina a força $\vec{F}$, isto é, o seu módulo, direção e sentido. Para dois condutores, como mostra a experiência, a força de interação está dirigida segundo a linha perpendicular aos fios e que passa pelos centros destes. Contudo, isso é o resultado da interação de duas correntes paralelas e não a direção do campo magnético criado por uma corrente.

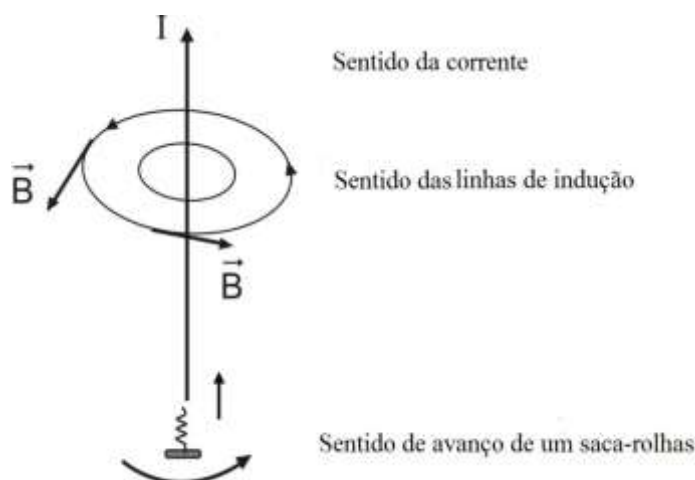


Figura 10.2

Inserindo uma agulha magnética no campo de um fio reto, nós concluimos que as linhas magnéticas da corrente formam circunferências concêntricas com sentido determinado pela regra do parafuso de rosca direita (um saca-rolhas), como mostra na Figura 10.2.

O sentido das linhas de indução é dado pelo sentido de rotação de um saca-rolhas introduzido no sentido da corrente (regra da mão direita).

O caráter vetorial do campo magnético em volta de um condutor com corrente é estabelecido por uma expressão mais geral que recebeu o nome de lei de Biot e Savart.

Passemos à formulação dessa lei, depois de algumas observações antecipadas.

A fórmula (10.10) mostra que a corrente I_1 que passa pelo fio provoca a ação de força na outra corrente I_2 . Consequentemente, em torno do condutor com corrente I_1 existe um campo magnético. De forma análoga, como foi feito para o campo elétrico, introduzimos o conceito concernente ao valor da força que atua devido à corrente I_1 , por unidade de corrente I_2 , ou seja, quando $I_2 = 1 \text{ A}$, e $L = 1 \text{ m}$. Simbolizando essa força pela letra B , temos por definição:

$$B = \frac{F}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{b}. \quad (10.11)$$

Essa grandeza tem o nome de indução magnética ou densidade do fluxo magnético. Vista sob certos aspectos, ela é análoga à densidade do fluxo elétrico, o vetor $\vec{D}$, introduzido no capítulo 2 deste livro. Essa analogia estende-se à dependência da grandeza B das propriedades do meio. Introduzindo a permeabilidade magnética relativa do meio μ , vamos escrever a expressão (10.11) na forma mais geral:

$$B = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (10.12)$$

Se na fórmula para a intensidade do campo elétrico a permissividade dielétrica do vácuo ϵ_0 e do meio ϵ vinham no denominador, então aqui para a indução magnética as grandezas idênticas μ_0 e μ vêm no numerador. A grandeza análoga à indução elétrica $\vec{D}$ para o campo magnético chama-se intensidade do campo magnético $\vec{H}$, e em módulo é:

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b} = \frac{I}{2\pi b}. \quad (10.13)$$

Determinemos as unidades da intensidade do campo magnético H e da indução B . No sistema SI, a unidade de intensidade do campo magnético de acordo com a fórmula (10.13), é o campo criado por

uma corrente retilínea de $1A$ na distância $b = (1/2\pi)m$. Essa unidade não recebeu denominação especial e se chama 1 ampère por metro ($1A/m$).

Comparemos essa unidade com a unidade de indução magnética no sistema *CGSM*, onde a força de Ampère e, conseqüentemente, a expressão para H não inclui o coeficiente 4π .

$$H = \frac{2I}{b}. \quad (10.14)$$

A unidade de intensidade do campo magnético nesse sistema, naturalmente, será a intensidade criada por uma corrente retilínea de 1 unidade *CGSM* na distância de 2 cm. Essa unidade chama-se oersted (*Oe*).

Como converter 1 *Oe* em A/m ?

Tomemos um campo igual a $1A/m$ e determinemo-lo em oersted (corrente de $1A = 10^{-1}CGSM$, distância de $(1/2\pi)m = 100cm/2\pi$).

$$H[A/m] = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{100/2\pi} = 4\pi \cdot 10^{-3}Oe. \quad (10.15)$$

De modo aproximado, pode-se considerar que $1Oe \approx 80A/m$.

Vamos agora definir as unidades da indução magnética. No sistema *CGSM*, a permeabilidade do vácuo μ_0 é igual à unidade, conseqüentemente, a intensidade do campo e a indução coincidem no vácuo. Num meio com permeabilidade magnética μ , a indução é maior que a intensidade μ vezes. Logo, no meio caracterizado pelo valor da permeabilidade magnética μ , a intensidade de campo magnético é expressa como segue:

$$B = \mu H = \frac{\mu 2I}{b}. \quad (10.16)$$

A unidade de indução magnética (densidade do fluxo magnético) é a indução criada por uma corrente retilínea de uma unidade *CGSM* num meio com permeabilidade magnética μ na distância de $2m$ do fio com corrente. Essa unidade tem o nome de gauss (*G*). No vácuo ela coincide com oersted.

A unidade de indução magnética B no sistema SI é o tesla (*T*). Essa unidade, por definição, no vácuo difere da unidade da intensidade do campo magnético H ($1A/m$) pelo coeficiente μ_0 que é igual a $4\pi \cdot 10^{-7}V \cdot s / A \cdot m$. Sendo a intensidade do campo magnético (no vácuo) $1A/m$, a indução é igual a $4\pi \cdot 10^{-7}T$ e um tesla, conseqüentemente, corresponde à intensidade do campo:

$$H[T] = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} A/m. \quad (10.17)$$

A unidade de densidade do fluxo magnético no sistema CGSM é gauss (G). Encontremos a quantos gauss é igual um tesla. Das fórmulas (10.15) e (10.17), obtemos:

$$1T = \frac{4\pi \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} G = 10^4 G. \quad (10.18)$$

Em qualquer meio com permeabilidade μ , a indução B está relacionada com a intensidade H pela expressão:

$$B = \mu \mu_0 H. \quad (10.19)$$

Vamos acentuar, mais uma vez, a analogia entre as grandezas elétricas e magnéticas.

No tocante aos aspectos relacionados com as forças de interação, observa-se a seguinte analogia entre $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$: a intensidade do campo elétrico $\mathbf{E}$ é expressa pela lei de Coulomb e tem, como grandeza análoga, a indução magnética B , definida pela força de Ampère.

$$E = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2}; \quad B = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (10.20)$$

A indução elétrica D (ou deslocamento elétrico) difere de E pelo fato de que na sua expressão não entram os parâmetros ε e ε_0).

Portanto, as expressões para os módulos de $\vec{D}$ e $\vec{H}$ são idênticas formalmente, pois:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}; \quad H = \frac{2I}{4\pi b}. \quad (10.21)$$

Consequentemente, a indução magnética $\vec{B}$ no magnetismo é análoga à intensidade do campo elétrico E e a intensidade do campo magnético H é análoga à indução elétrica $\vec{D}$. Entretanto, é $\vec{B}$ e $\vec{D}$ que parecem ser análogos, sob o aspecto em que ambos são respectivamente denominados fluxos do campo magnético e elétrico. Do mesmo modo que $\vec{E}$ e $\vec{H}$ podem parecer análogos, pois são intensidades dos campos elétrico e magnético, respectivamente. Na realidade, o estudo do eletromagnetismo, devido ao seu desenvolvimento histórico sinuoso e às vezes conflituoso e cheio de vicissitudes, tem essas particularidades.

Portanto, os nomes das unidades para os campos $\vec{B}$ e $\vec{H}$ prestam homenagens a quatro cientistas que deram contribuições valiosas para o estudo do eletromagnetismo. Já falamos de Oersted, Gauss e Ampère. Falta ainda dizer algumas palavras sobre Tesla. Nikola Tesla (1856-1943) foi uma figura excêntrica, mas, ao mesmo tempo, foi um grande inventor que deu enormes contribuições para a tecnologia do mundo moderno. Ele era de etnia sérvia, mas nasceu na Croácia, então uma província do império austro-húngaro. Depois de concluir seu curso de engenharia elétrica, foi trabalhar na sucursal da companhia de Thomas Edison em Paris, e, em seguida, foi transferido para sua sede em Nova York. Ele ficou muito famoso por defender o uso da corrente alternada, contra a opinião de Edison, que preferia continuar utilizando a corrente contínua. Mas, ele fez muito mais que defender o uso da corrente alternada. Ele é um dos maiores, se não o maior inventor de todos os tempos, que também se destacou pelas suas excentricidades.

CAPÍTULO 11

LEI DE AMPÈRE. LEI DE BIOT E SAVART

Com base na fórmula (10.10), podemos encontrar a fórmula de interação de correntes retilíneas paralelas. Para correntes lineares de qualquer dimensão, forma dos condutores e posição mútua destes, a força de interação entre duas correntes é calculada com base na expressão mais geral chamada lei de Ampère. A força de Ampère provém da lei de Ampère como um caso particular.

Examinemos dois setores elementares de condutores lineares, dl_1 e dl_2 , com correntes I_1 e I_2 , situados no mesmo plano e separados por uma distância r (Figura 11.1).

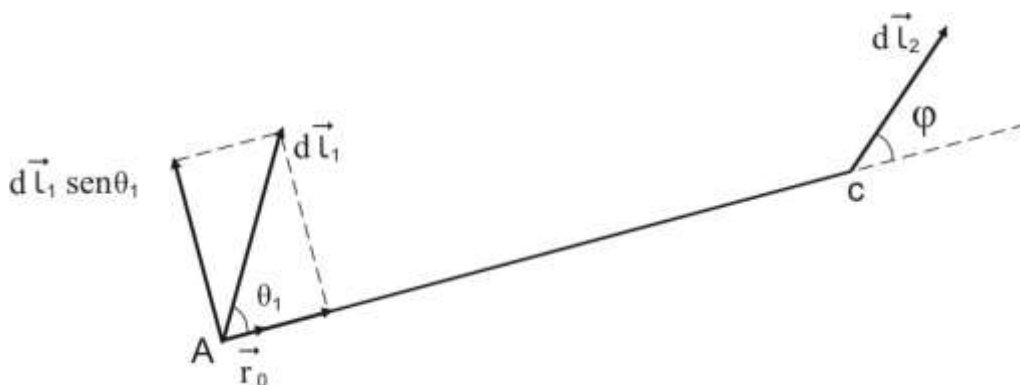


Figura 11.1

Para esse caso, a lei de Ampère diz que a força atuante por parte do elemento dl_1 no elemento dl_2 é diretamente proporcional aos comprimentos desses setores, ao valor das correntes, ao seno do ângulo θ_1 e inversamente proporcional ao quadrado da distância:

$$dF \sim \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot dl_2 \cdot \sin \theta_1}{r^2} . \quad (11.1)$$

Tentemos imaginar o quadro dessa interação. Em primeiro lugar, o campo criado pelo setor dl_1 no ponto C é determinado pelo ângulo θ_1 . Se $\theta_1 = 0$, o campo é igual a zero, isto é, o campo magnético da corrente não se cria nos pontos que se encontram na continuação do condutor com

corrente. O valor do campo no ponto C é determinado, desta forma, pela projeção de dl_1 sobre a perpendicular à direção AC . Em segundo lugar, o campo criado pela corrente I_1 no ponto C não depende de φ . É claro que, no ponto C , as linhas de indução são perpendiculares ao plano da Figura 11.2.

Para qualquer ângulo φ , o setor dl_2 encontra-se sob a mesma interação com as linhas de indução do campo. A posição do setor dl_2 no plano (estudamos justamente o caso plano) não influi no valor da força de interação do campo pois, além da direção de dl_2 , nada mais varia. Consequentemente, a interação do setor dl_2 com o campo não depende em grandeza do ângulo φ . Varia somente a direção da força que atua em dl_2 . Vamos fazer uma conclusão: a força atuante por parte de dl_1 no elemento dl_2 , em valor, não depende da direção de dl_2 se estes elementos encontram-se num mesmo plano. Ela é determinada pelas correntes I_1 e I_2 , pelo ângulo θ_1 e pelo quadrado da distância r^2 .

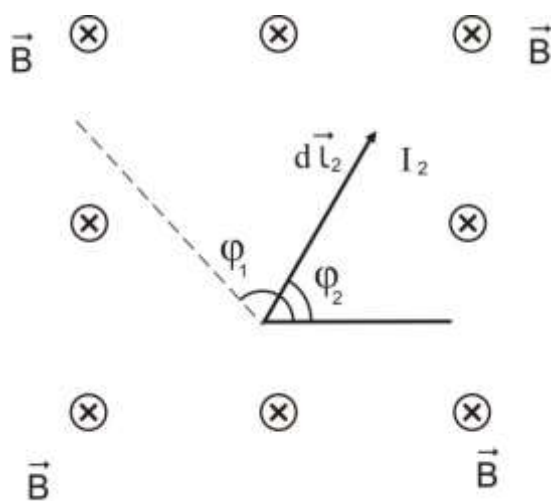


Figura 11.2

Utilizando esse raciocínio para o setor dl_2 , nota-se que, quando $\varphi = 0$, este elemento não exerce ação de força em dl_1 , enquanto que o mesmo sofre a ação de uma força por parte de dl_1 , que é determinada pela relação (11.1).

Para o caso estudado, a interação mecânica da terceira lei de Newton não é válida: o elemento dl_2 interage com o campo criado pelo setor dl_1 e não com o próprio setor.

Notemos que o produto

$$dl_1 \sin \theta_1 \quad (11.2)$$

pode ser representado por um produto vetorial introduzindo-se o vetor unitário $\vec{r}_0$ dirigido ao longo da distância AC de A para C . Então, temos:

$$dl_1 \sin \theta_1 = |\vec{dl}_1 \times \vec{r}_o|. \quad (11.3)$$

Vemos que com esta expressão determina-se também a direção das linhas de indução do campo magnético criado pela corrente $I_1 dl$ no ponto C . Elas serão dirigidas para trás da figura conforme a regra do saca-rolha (regra da mão direita), o que coincide com a direção do vetor:

$$\vec{dl} \times \vec{r}_o. \quad (11.4)$$

A direção da força que atua em dl_2 é determinada pelo ângulo φ . Para a determinação dessa direção, vamos examinar o caso geral de orientação mútua dos elementos de correntes dl_1 e dl_2 , quando eles não são coplanares (Figura 11.3).

Em comparação com o anteriormente estudado, o caso geral é diferente pelo fato de que o elemento dl_2 forma ângulo de $90^\circ - \theta_2$ com o plano θ onde se encontram $\vec{dl}_1$ e $\vec{r}_o$. A lei de Biot e Savart estabelece, para esse caso, que o valor da força atuante no elemento dl_2 é determinado pela projeção de dl_2 no plano θ .

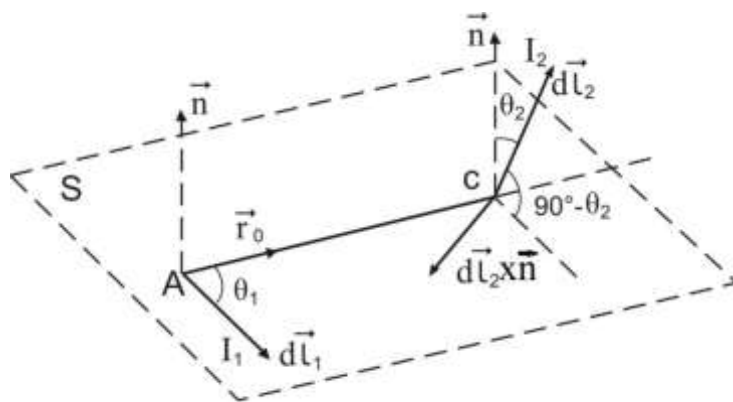


Figura 11.3

Por comodidade de obtenção da expressão da fórmula final através do produto vetorial, introduzimos o ângulo θ_2 entre dl_2 e a normal a esse plano. Por isso, a projeção de dl_2 no plano S será determinada pelo produto:

$$dl_2 \sin \theta_2, \quad (11.5)$$

que substitui dl_2 na formula (11.1),

$$dF \sim \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot dl_1 \sin \theta_1 \cdot dl_2 \sin \theta_2}{r^2}. \quad (11.6)$$

A escrita dessa grandeza na forma de um produto vetorial permite determinar também a direção da força $d\vec{F}$. Notemos que, para esse caso, de acordo com a Figura 11.2, o produto vetorial

$$d\vec{l}_1 \times \vec{r}_o$$

está dirigido segundo à normal ao plano S , isto é, coincide com a direção de $\vec{n}$.

Se multiplicarmos, vetorialmente, $d\vec{l}_2$ por $\vec{n}$, então, obtemos um vetor dirigido segundo a linha perpendicular ao elemento dl_2 e às linhas de indução criadas pelo elemento dl_1 . Se o ângulo $\theta_2 = 90^\circ$, temos o caso de atração que estudamos quando as correntes são paralelas. Se $\theta_2 = 0$ a força é nula (corrente I_2 está dirigida segundo as linhas de indução).

Como consequência disso, o produto vetorial de $d\vec{l}_2$ por $dl_1 \times \vec{n}$ determina o sentido da força e a fórmula (11.6) mostra que tal produto vetorial duplo dá o valor absoluto correto, pois foi introduzido por nós o ângulo θ_2 , cujo seno deve entrar no produto vetorial. Assim, a fórmula (11.6) pode ser escrita na forma vetorial:

$$d\vec{F} \sim \frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_o)}{r^2}. \quad (11.7)$$

Agora que já conhecemos a força de Ampère, vamos escrever esta expressão no sistema SI, para o vácuo, na forma de uma igualdade exata (o coeficiente, que liga a parte direita e a esquerda será, como em (10.10)), pois a força de Ampère é um caso particular dessa expressão:

$$d\vec{F} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2 (d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_o))}{r^2}. \quad (11.8)$$

Nesta forma, a expressão acima, que é um duplo produto vetorial, tem o nome de **lei de Ampère**. Dela, indiretamente, surge a fórmula para a indução magnética criada pelo elemento de corrente $I d\vec{l}_1$. De fato, vamos escrever a expressão (11.8) de outra forma:

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\mu_o I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_o)}{4\pi r^2}, \quad (11.9)$$

onde I_2 e $d\vec{l}_2$ relacionam-se com a corrente no campo criado pelo elemento $d\vec{l}_1$ com corrente I_1 num ponto situado à distância r desse elemento. Consequentemente, a indução magnética do elemento de corrente $I_1 d\vec{l}_1$ criada no ponto C (ver Fig. 11.3) é igual à grandeza:

$$\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_o)}{r^2} = d\vec{B} \quad (11.10)$$

Esta expressão tem o nome de lei de Biot e Savart.

A força que atua no elemento de corrente $I_2 d\vec{l}_2$ por parte do campo $d\vec{B}$ é determinada pela expressão:

$$d\vec{F} = I_2(d\vec{l}_2 \times d\vec{B}). \quad (11.11)$$

Quando utilizada para setores de comprimento finito com corrente e campo constantes, essa fórmula toma a forma

$$\vec{F} = I(l \times B). \quad (11.12)$$

e determina o módulo, a direção e o sentido da força que age por parte do campo $\vec{B}$ sobre a corrente I que passa pelo fio retilíneo de comprimento l . Essa força tem o nome de força de Ampère. Para a determinação do sentido da força, no caso de interação entre campos e correntes, é conveniente utilizar-se uma regra convencional.

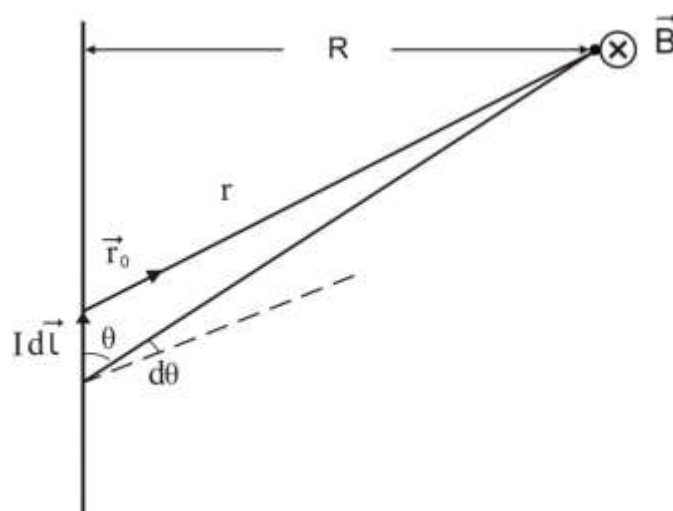


Figura 11.4

Como escreve Whittaker (1989, v. 1, p. 86), a lei de força de Ampère, publicada na década de vinte do século XIX, ainda escrita em notação não vetorial, tinha uma expressão mais geral do que a fórmula que apresentamos acima, neste capítulo. Segundo ele, foi Hermann Grassmann (1809-1877) quem, em 1845, escreveu a lei de Ampère na forma vetorial, indicada neste capítulo pela equação (11.8), permitindo assim a obtenção da lei de Biot-Savart sob a forma da equação (11.10), também aqui neste mesmo capítulo.

Sabendo-se que o sentido das linhas de indução da corrente é determinado pela regra do saca-rolha (regra da mão direita), é preciso determinar de qual lado do condutor com corrente as suas linhas de indução somam-se com as linhas do campo externo (tornam-se mais densas). É desse lado que ocorrerá a atuação da força.

A Fórmula (11.10) permite encontrar o valor, a direção e o sentido do vetor de indução magnética (e a intensidade do campo $\vec{H}$) para as correntes que circulam nos fios lineares de diferentes formas geométricas. Em particular, a indução de um fio retilíneo infinito é obtida integrando-se pelo ângulo θ de 0 até π , como se vê na Figura 11.4:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}_o}{4\pi r^2}. \quad (11.13)$$

O sentido do vetor $\vec{B}$ é definido pelo produto vetorial $d\vec{l} \times \vec{r}_o$, isto é; as linhas do campo $\vec{B}$ são dirigidas para trás da figura (de acordo com a regra do saca-rolha).

Vamos encontrar o módulo do vetor $\vec{B}$. Devemos fazer as seguintes substituições:

$$r = \frac{R}{\sin \theta}, \quad |d\vec{l} \times \vec{r}_o| = dl \sin \theta,$$

$$dl = \frac{r d\theta}{\sin \theta} = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}. \quad (11.14)$$

$$dl \sin \theta = \frac{R d\theta}{\sin \theta},$$

$$d\theta = \frac{\mu_0 I \frac{R d\theta}{\sin \theta}}{4\pi \frac{R^2}{\sin^2 \theta}} = \frac{\mu_0 I \sin \theta d\theta}{4\pi R},$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} T. \quad (11.15)$$

Como era de se esperar, obtivemos a indução de uma corrente retilínea definida pela força de Ampère (ver fórmula (10.11)). Porém, nesse caso, a introdução do coeficiente 2, que antes foi feita sem fundamentação (ver Capítulo 10), fica esclarecida.

Agora, vamos encontrar o campo de uma corrente circular de raio R , no centro do círculo (Figura 11.5).

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}_0}{R^2}. \quad (11.16)$$

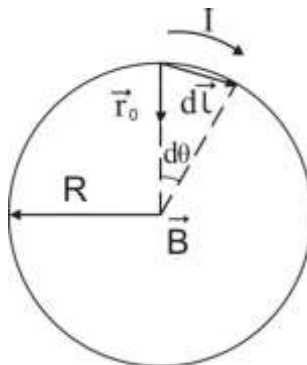


Figura 11.5

O sentido do vetor $\vec{B}$, assim como no caso da corrente retilínea, é determinado pelo produto vetorial $d\vec{l} \times \vec{r}_0$, isto é, em realidade, também pela regra do saca-rolhas. Para o sentido da corrente mostrada na Figura 11.5, as linhas de indução do campo $\vec{B}$ serão dirigidas para trás da figura.

Vamos encontrar o valor do campo $\vec{B}$, expresso em tesla (T):

$$|d\vec{l} \times \vec{r}_0| = R d\theta,$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R d\theta}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} d\theta, \quad (11.17)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{R} T. \quad (11.18)$$

A intensidade do campo magnético, para uma corrente retilínea e circular, será, correspondentemente, em ampère/metro (A/m):

$$H_{ret} = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{R} = \frac{I}{2\pi R} A/m, \quad (11.19)$$

$$H_{circ} = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi I}{R} = \frac{I}{2R} A/m. \quad (11.20)$$

A fórmula que define a força de Ampère (11.12) pode ser utilizada no cálculo da força que age sobre uma partícula carregada que se move num campo magnético. Vamos expressar a corrente por meio da densidade de corrente, e a densidade de corrente por meio do número de partículas n , da carga e , e da velocidade do movimento ordenado v (velocidade de arrasto das partículas).

$$I = jS = n e v S, \quad (11.21)$$

de onde,

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) = n e l S (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (11.22)$$

Aqui, lS representa o volume total e $n S l$, o número total de partículas. Consequentemente, a força que corresponde a uma partícula, a chamada força de Lorentz, é definida pela fórmula:

$$\vec{F}_L = e(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (11.23)$$

Na presença do campo elétrico e do campo magnético, a força de Lorentz toma a seguinte forma:

$$\vec{F}_L = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (11.24)$$

A força de Lorentz foi introduzida pelo físico neerlandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928). Em 1902 ele, juntamente com outro neerlandês, o físico Pieter Zeeman (1865-1943), recebeu o Prêmio Nobel de Física por seus trabalhos sobre radiações eletromagnéticas.

CAPÍTULO 12

APLICAÇÕES E CONSEQUÊNCIAS DA LEI DE BIOT E SAVART

Conhecendo-se o campo magnético (isto é, a indução $\vec{B}$), por exemplo, o campo criado por uma corrente circular, é possível resolver uma série de problemas eletrodinâmicos importantes.

Examinemos como encontrar, experimentalmente, a razão entre a unidade de corrente no sistema CGSM e a unidade de corrente no sistema CGSE. Para isso, vamos fazer um circuito que permite medir a corrente, ao mesmo tempo, por dois métodos; pelo método elétrico (pela carga a ele comunicada) e pelo método magnético (pela sua ação magnética). Tal circuito está representado na Figura 12.1.

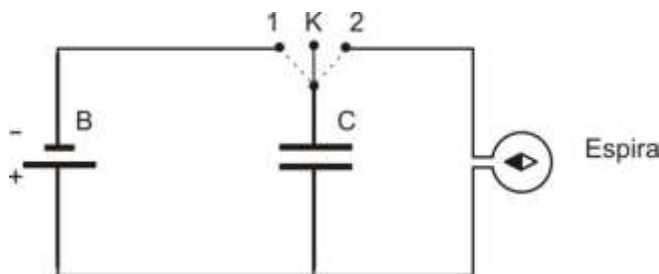


Figura 12.1

Seja o comutador K que se liga, alternadamente, aos contatos 1 e 2, com a frequência de n vezes por segundo. Ao se ligar K ao contato 1 verifica-se a passagem da carga da bateria B ao capacitor C que se carrega até a diferença de potencial V (grandeza conhecida). O capacitor de capacidade C (grandeza conhecida), com isso, adquire a carga q :

$$q = CV . \quad (12.1)$$

Ao se ligar K ao contato 2 essa carga passa pela espira f criando corrente.

Se em um segundo ocorrem n comutações de K com os contatos 1 e 2, então, a carga total comunicada pelo capacitor no circuito de corrente, isto é, a própria corrente I será igual à grandeza:

$$I = nq = nCV . \quad (12.2)$$

É também possível medir esta mesma corrente pela sua ação magnética colocando no centro do fio circular uma agulha magnética ou uma espira com corrente. Quando $I = 0$, a agulha orienta-se segundo o campo magnético terrestre (ou outro campo constante conhecido). Quando $I \neq 0$, a agulha desvia-se da posição inicial. O valor do desvio é proporcional à corrente percorrida e permite medir o campo da corrente circular I que com ela está relacionada pela expressão

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{R} , \quad (12.3)$$

onde R é o raio da espira. Desta maneira, temos a possibilidade de encontrar a unidade de corrente como resultado de medições, ao mesmo tempo, elétricas e magnéticas e determinar a sua razão que é igual ao valor que coincide com a velocidade da luz no vácuo:

$$\frac{1 \text{ CGSM}}{1 \text{ CGSE}} = 3.10^{10} \text{ cm/s} . \quad (12.4)$$

A analogia entre os campos elétricos e magnéticos (assim como e entre outros campos de força) nos permite introduzir o conceito de tensão magnética.

A tensão elétrica ou diferença de potencial é definida como o trabalho realizado no deslocamento da unidade de carga pelo caminho que liga dois pontos do campo:

$$V = \int_L E_t dl , \quad (12.5)$$

onde dl é o elemento de caminho e E_t é a projeção da intensidade do campo na direção do caminho L em dado ponto corrente (componente tangencial do campo elétrico).

A grandeza análoga, para o campo magnético, pode ser chamada de tensão magnética:

$$V_M = \int_L H_t dl . \quad (12.6)$$

Do ponto de vista da física, a diferença entre o campo magnético e o campo elétrico consiste em que as linhas magnéticas de indução são sempre fechadas. Por exemplo, uma corrente retilínea cria em torno de si um campo magnético cujas linhas de indução representam círculos concêntricos. Por isso,

para caracterizar o campo magnético utiliza-se o valor do trabalho calculado pela fórmula (12.6) para uma curva fechada. Essa grandeza chama-se circulação do vetor $\vec{H}$ e é representada pelo símbolo:

$$\oint_L H_t dl, \quad (12.7)$$

onde o círculo significa integração por um percurso fechado. Na fórmula (2.9), tal círculo significava uma superfície fechada). Vamos encontrar a circulação do campo magnético criado por uma corrente retilínea infinita. As linhas magnéticas de indução, nesse caso, são circulares, consequentemente, a direção dos vetores $\vec{H}_t$ e $d\vec{l}$ são coincidentes:

$$H_t dl = (\vec{H} d\vec{l}) = H dl \cos 0^\circ = H dl. \quad (12.8)$$

Expressemos o elemento de arco dl através do raio do círculo R (isto é, a distância entre o elemento dl e o fio) e do ângulo elementar $d\theta$:

$$dl = R d\theta, \quad (12.9)$$

$$H dl = H R d\theta.$$

Ao substituir na fórmula da circulação (12.7) a intensidade do campo magnético $\vec{H}$ da corrente retilínea (fórmula (11.19)), resulta que

$$\oint H_t dl = \frac{I R}{2R\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = I, \quad (12.10)$$

obtemos assim a importante relação:

$$\oint_L H_t dl = I. \quad (12.11)$$

Na forma vetorial, ela é escrita da seguinte maneira:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

Ao lado da importância desta expressão para os cálculos e generalizações que permitem formular uma das leis fundamentais do eletromagnetismo, esta relação mostra, uma vez mais, (ao lado da fórmula (11.15)) a comodidade de introdução do coeficiente 2, na fórmula para a força de interação de duas correntes (fórmula (10.2)). Se a unidade de corrente fosse definida pela relação (10.2) sem o

coeficiente 2, ele entraria na fórmula (12.11) e ela não seria tão cômoda para os cálculos e para a memorização.

Transformemos a fórmula (12.11) expressando I através da sua densidade de corrente:

$$I = \int_S j_n dS \oint_L H_L dl = \int_S j_n dS . \quad (12.12)$$

No vácuo, onde os vetores $\vec{H}$ e $\vec{B}$ diferem (no sistema SI) somente pelo coeficiente constante μ_0 , a relação (12.12) pode ser escrita, também, para o vetor $\vec{B}$:

$$\oint_L B_t dl = \mu_0 \int_S j_n dS. \quad (12.13)$$

Para os meios como $\mu \neq 1$, a relação (12.12) é somente é justa para o vetor $\vec{H}$, o que será mostrado um pouco mais tarde.

Recordemos que num campo eletrostático E a grandeza análoga sempre era igual a zero:

$$\oint E_t dl = 0 ,$$

isto é, o trabalho da força eletrostática $\vec{F} = q\vec{E}$ para um caminho fechado era igual a zero e o trabalho não depende da forma do caminho percorrido.

No caso do campo magnético, o trabalho por um caminho fechado não é igual a zero, como mostram as fórmulas (12.12) e (12.13). Consequentemente, o campo magnético não é um campo potencial. Ele relaciona-se com aqueles campos que são chamados rotacionais ou solenoidais.

Apliquemos a relação (12.11), que expressa a rotação do campo magnético de uma corrente retilínea, para o cálculo da intensidade do campo de um solenoide, isto é, de uma bobina que tem n espiras por unidade de comprimento. Vamos encontrar a circulação do vetor $\vec{H}$ pelo circuito que inclui parte da bobina de comprimento L' (Figura 12.2). Para isso, vamos escolher um circuito que inclui parte do eixo do solenoide (de comprimento L'), os percursos 1 e 2 que vão para o infinito e uma curva (ou reta) de fechamento infinitamente afastado. As linhas magnéticas de indução de cada espira estão dirigidas ao longo de círculos em volta da espira. Somando-se, elas dão o campo magnético resultante dirigido dentro do solenoide pelo seu eixo (Figura 12.3), isto é, a componente do campo $\vec{H}$, na direção dos caminhos 1 e 2, é igual a zero.

A curva de fechamento (ou reta), no infinito, também não dá contribuição na circulação do vetor $\vec{H}$, pois o campo magnético do solenoide no infinito é igual a zero. Consequentemente, para o valor da circulação do vetor $\vec{H}$, pelo percurso escolhido, contribui somente o seu setor L' . Dessa maneira, obtemos:

$$\oint_L H_t dl = H L' .$$

A curva de fechamento (ou reta), no infinito, também não dá contribuição para a circulação do vetor $\vec{H}$, pois o campo magnético do solenoide no infinito é igual a zero. Consequentemente, para o valor da circulação do vetor $\vec{H}$, pelo percurso escolhido, contribui somente o seu setor L' . Dessa maneira, obtemos:

$$\oint_L H_t dl = H L' . \quad (12.14)$$

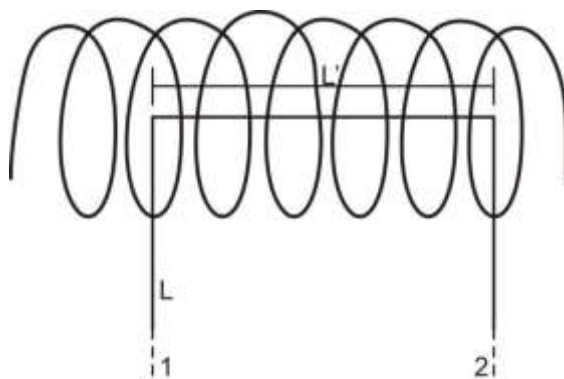


Figura 12.2

De acordo com a fórmula (12.11), temos:

$$\oint H_t dl = n L' I = H L' , \quad (12.15)$$

isto é;

$$H = n I .$$

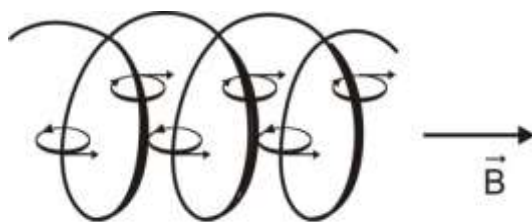


Figura 12.3

Notemos que a dimensão de n é o inverso de metro (m^{-1}), consequentemente, como foi estabelecido acima, a dimensão de H é *ampère /metro*. A fórmula (12.15), entretanto, permite dar outra definição da dimensão de H , isto é, pela corrente que circula no solenoide e o número de espiras por unidade de comprimento, assim, H pode ser definido em ampère-espira. Essa forma de medir H é amplamente utilizada na eletrotécnica.

A fórmula obtida (12.15), para o campo H no solenoide, permite encontrar a intensidade do campo H no toróide, isto é, uma bobina estendida por um círculo de raio r (Figura 12.4). 0

comprimento da bobina do toróide L expresso por meio de r da mesma forma que o comprimento de um circuito por meio do raio: $L = 2\pi r$.

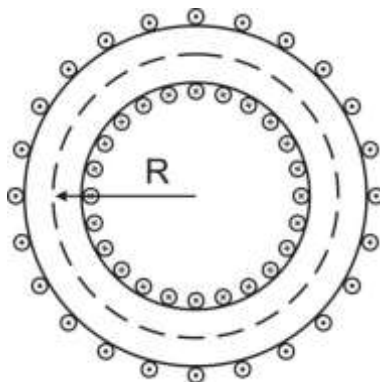


Figura 12.4

Consequentemente, tomando L como contorno de integração, obtemos $HL = 2\pi rnI$, ou seja; esta relação coincide com a obtida anteriormente:

$$H = nI. \quad (12.16)$$

Examinemos que formas terão as relações (12.12) e (12.13) para uma substância com permeabilidade magnética μ , diferente da unidade. Tais substâncias são chamadas de magnéticas.

De acordo com a lei de Ampère, sobre um condutor com corrente I age uma força por parte do campo magnético $\vec{B}$. Consideremos uma corrente fechada em forma de um retângulo (Figura 12.5), inserida no campo magnético $\vec{B}$. Em cada lado da espira, pela lei de Ampère, atua a força:

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}). \quad (12.17)$$

Para uma espira, essa força é proporcional à corrente, ao comprimento dos fios e à indução $\vec{B}$. Como na espira, as correntes nos seus lados opostos circulam em sentidos opostos, surge um momento de rotação (torque) que é proporcional à corrente I , à área da espira $a.b = S$.

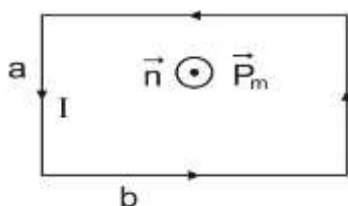


Figura 12.5

O produto dessas grandezas recebeu o nome de momento magnético e é geralmente simbolizado por $\vec{P}_M$. Ele é um vetor igual a:

$$\vec{P}_M = IS\vec{n}, \quad (12.18)$$

onde $\vec{n}$ é o vetor unitário, dirigido perpendicularmente ao plano de espira, com o seu sentido determinado pela regra da mão direita (ou do saca-rolhas): curve os dedos da mão direita acompanhando a forma da espira, de modo que suas extremidades apontem no sentido da corrente, o polegar estendido estará, então, apontando no sentido do vetor $\vec{n}$, e conseqüentemente, do vetor $\vec{P}_M$.

Experimentalmente, foi estabelecido que, para as correntes moleculares de uma substância, o somatório do momento magnético por unidade de volume, que vamos representar por $\vec{M}$, é igual à soma dos momentos $\vec{P}_M$ por unidade de volume e é proporcional à intensidade do campo $\vec{H}$:

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{P}_M}{\Delta V} = \chi_m \vec{H}. \quad (12.19)$$

O coeficiente χ_m recebeu o nome de susceptibilidade magnética de uma substância. Quando $\chi_m < 0$ a substância chama-se diamagnética; quando $\chi_m > 0$, paramagnética. O diamagnetismo foi descoberto por Faraday, em 1846, quando ele observou que um pedaço de bismuto era repelido pelos polos de um ímã. Logo em seguida, Weber deu uma explicação teórica para o fenômeno diamagnético, supondo o aparecimento de correntes moleculares induzidas, quando as substâncias diamagnéticas se encontram em presença de campos magnéticos variáveis. A susceptibilidade do bismuto é $\chi_m = -1,66 \cdot 10^{-5}$; a água tem susceptibilidade magnética $\chi_m = -0,91 \cdot 10^{-5}$; o cobre também é uma substância diamagnética, $\chi_m = -0,98 \cdot 10^{-5}$, mas o alumínio é um material paramagnético de $\chi_m = 2,3 \cdot 10^{-5}$. As substâncias diamagnéticas e paramagnéticas possuem valores pequenos da susceptibilidade magnética. Algumas substâncias caracterizam-se por possuírem grandes valores positivos de χ_m ; tais substâncias são chamadas “ferromagnéticas”. O movimento térmico contraria a criação de uma orientação magnética alinhada das moléculas. Em 1895, o físico francês Pierre Curie (1859-1906) experimentalmente estabeleceu a relação:

$$\chi_m = \frac{C}{T}, \quad (12.20)$$

onde C é a constante de Curie, característica de um dado material paramagnético, T é a temperatura em kelvin. Esta é a chamada lei de Curie. Em 1905, outro físico francês, Paul Langevin (1872-1946) conseguiu dar uma fundamentação teórica para o diamagnetismo e o paramagnetismo, empregando novos conceitos com base na teoria do elétron, mostrando inclusive que tanto o efeito Zeeman quanto

o diamagnetismo estão intimamente relacionados com a precessão de Larmor. A frequência da pressão de Larmor será apresentada no próximo capítulo. O efeito Zeeman consiste na divisão das linhas do espectro de emissão, sob ação de um campo magnético externo. O efeito Zeeman confirmava a teoria de Lorentz, que havia previsto que elétrons em movimento, sob a influência de um campo magnético deveria produzir luz.

Desse maneira, uma substância que tem um momento magnético próprio $\vec{M}$, criado pelas correntes moleculares e pelos campos externos, cria uma intensidade de campo resultante diferente do campo no vácuo. O campo magnético das correntes moleculares orientadas contribui para o campo total no espaço intermolecular da substância. A intensidade do campo suplementar coincide com o valor do momento resultante $\vec{M}$. Vamos efetuar um cálculo como demonstração.

O módulo da intensidade do campo de uma corrente circular é definida pela fórmula (11.20):

$$H = \frac{I}{2r}.$$

Encontremos o valor de $\vec{M}$ e comparemo-lo com o valor de $\vec{M}$. O vetor $\vec{M}$ é por definição igual a $\sum \frac{\vec{P}_M}{\Delta V}$. Vamos supor que as moléculas sejam esferas de raio r e que ocupem o volume de um cubo de lado a . O volume do cubo será maior que o volume das esferas de $\frac{6}{\pi}$ vezes. Consequentemente, o momento total $\sum \vec{P}_M$ de todas as moléculas por unidade de volume, completamente ocupado pelas moléculas, é definido pela grandeza:

$$\sum P_M = n I S = n I \pi r^2, \quad (12.21)$$

(n é o número de moléculas por unidade de volume).

Temos assim o momento magnético por unidade de volume, tendo em conta que entre as esferas (moléculas) há espaço livre:

$$M = \frac{n I \pi r^2}{\left(\frac{6}{\pi}\right) n \frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{\pi}{4} \frac{I}{2r}. \quad (12.22)$$

Essa grandeza coincide, quase exatamente, com a intensidade do campo criado por uma corrente circular (fórmula (11.20)).

Desse modo, se no vácuo a indução do campo magnético é definida pela expressão $\vec{B}/\mu_0 = \vec{H}$, então, numa região com presença de substância, temos

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M},$$

ou

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \quad (12.23)$$

Vamos substituir a expressão experimental $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ nesta fórmula (11.23) . Logo, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H}$,

ou

$$\vec{H}(1 + \chi_m) = \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (12.24)$$

Comparando com a expressão $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, obtemos:

$$\mu = 1 + \chi_m. \quad (12.25)$$

Utilizemos a expressão obtida para encontrar a circulação de $\vec{B}$ numa substância magnética ($\mu \neq 1$). Para isso, vamos expressar a circulação de $\vec{B}$ pela fórmula da circulação para o vácuo (fórmula (12.11) e (12.13) tendo em conta que, além da corrente I na substância magnética, as correntes moleculares I_m também devem ser consideradas.

$$\oint B_t dl = \mu_0 \sum I + \mu_0 \sum I_m. \quad (12.26)$$

Encontremos a soma das correntes limitadas pelo contorno por onde se efetua a integração. Vejamos o elemento dl do contorno na substância (Figura 12.6). Esse elemento contém as correntes moleculares daquelas moléculas cujos centros encontram-se dentro do cilindro de área S e cujo volume é igual a:

$$dV = S \cos \alpha dl. \quad (12.27)$$

Se o número de partículas por unidade de volume é n , então, o número de correntes moleculares contidas pelo elemento dl é igual a $nS \cos \alpha dl$ e a corrente somatória para o elemento dl é

$$I n S \cos \alpha dl. \quad (12.28)$$

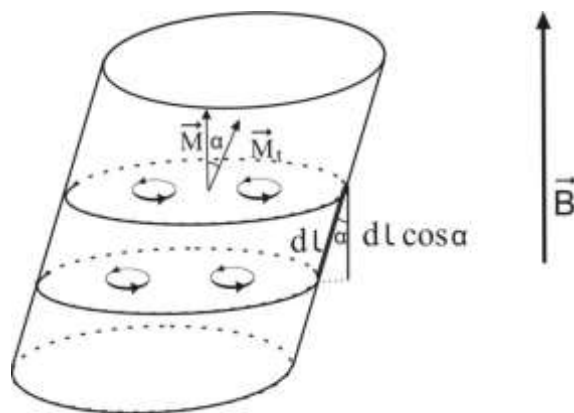


Figura 12.6

Como $IS = P_M$ (movimento molecular de uma molécula) e $P_M n = M$, obtemos

$$I n \cos \alpha d = M \cdot \cos \alpha dl . \quad (12.29)$$

$M \cdot \cos \alpha$ representa a projeção de $\vec{M}$ no elemento do percurso. Vamos simbolizá-lo por M_t . Então, para todo o percurso de integração, encontramos:

$$\oint B_t dl = \mu_0 \sum I + \mu_0 \oint M_t dl , \quad (12.30)$$

ou

$$\oint \left(\frac{B_t}{\mu_0} - M_t \right) dl = \sum I , \quad (12.31)$$

Da fórmula (12.23) segue que

$$\left(\frac{B_t}{\mu_0} - M_t \right) = \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right)_t = H_t , \quad (12.32)$$

De modo que

$$\oint H_t dl = \sum I , \quad (12.33)$$

ou seja, a expressão (12.11) para a indução H é correta, tanto no vácuo como em qualquer substância magnética.

CAPÍTULO 13

MOMENTOS MAGNÉTICOS DOS ÁTOMOS E MOLÉCULAS. CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA OS VETORES DO CAMPO MAGNÉTICO

Apliquemos agora o conceito de momento magnético, que nós introduzimos no capítulo anterior, aos átomos e moléculas. Examinemos o caso de um elétron que gira em torno do núcleo de um átomo por uma órbita circular, sendo a sua carga “ e ”. Então, conhecendo a frequência da sua rotação ν e o raio da órbita r , vamos encontrar a velocidade linear.

$$v = 2\pi r \nu. \quad (13.1)$$

O momento magnético do átomo P_M , isto é, o produto da corrente I pela área da área do contorno, vai ser expresso através da carga, da frequência de rotação e do raio da órbita. A carga que passa em 1 segundo através da secção da órbita ou seja, a corrente, é igual ao produto da carga “ e ” pela frequência ν ,

$$I = e \nu, \quad (13.2)$$

Consequentemente,

$$P_M = I S = e \pi \nu r^2. \quad (13.3)$$

Substituindo, aqui, ν de (13.1), vamos obter:

$$P_M = e \frac{v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{e r v}{2}. \quad (13.4)$$

Essa grandeza chama-se momento orbital do elétron. Notemos que o momento angular da partícula, L , tem o nome de momento mecânico orbital.

$$L = m v r. \quad (13.5)$$

A razão P_M / L tem o nome de relação giromagnética. O sinal “menos” atribuído a esta razão mostra que nela o numerador e o denominador têm sinais contrários. Como consequência da magnetização, o momento magnético orbital orienta-se no sentido do campo e o momento mecânico em sentido contrário.

$$\frac{P_M}{L} = -\frac{erv}{2mvr} = -\frac{e}{2m} . \quad (13.6)$$

Daqui, tira-se a conclusão de que com a magnetização da substância (a criação do momento P_M) deve surgir um efeito mecânico. Esse fenômeno foi confirmado, experimentalmente, por Einstein, de Haas e Barnett. Wander Johannes de Haas (1878-1960) foi um físico experimental holandês, que em 1915, quando desenvolvia estudos sobre o magnetismo em Berlim, fez experimentos em parceria com Albert Einstein, que também se encontrava trabalhando em Berlim. A ideia de Ampère das correntes moleculares foi a motivação por trás do arranjo experimental adotado por Einstein e W. de Haas. O experimento de Einstein-de Haas consiste na magnetização periódica (pulsção da corrente) de uma barra de ferro C, colocada no interior de um solenoide S (Figura 13.1).

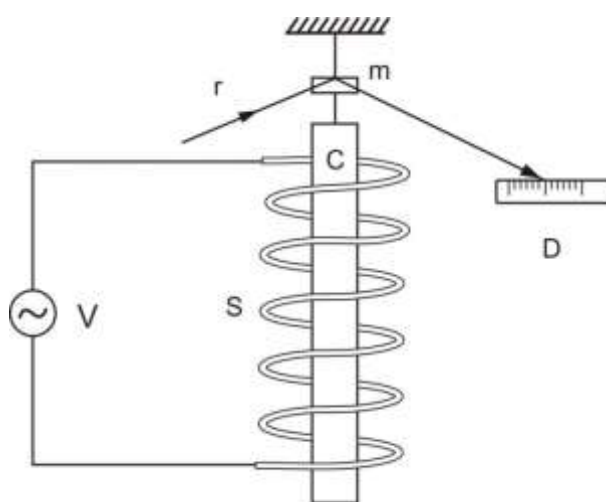


Figura 13.1

Se a frequência de pulsção da corrente for escolhida de modo que coincida com a frequência das oscilações mecânicas da barra, então, como resultado do fenômeno de ressonância magnética, a barra entra em movimento oscilatório que, com o auxílio do raio de luz r , do espelho m e da escala D , pode ser observada.

Nos experimentos do físico estadunidense Samuel Jackson Barnett (1873-1956), realizados naquele mesmo período, foi observado o efeito oposto: o surgimento de magnetização como consequência de uma rotação. Como resultado de alguns experimentos, foi notado que a magnitude da relação giromagnética não é igual a $e/2m$, mas sim, igual a e/m . Este resultado experimental explica-

se pelo fato de que o momento magnético do elétron não está relacionado com o seu momento orbital, mas com o spin, que é uma característica quântica do movimento de rotação de uma partícula elementar. O momento angular intrínseco do elétron (*spin*) é igual a $L_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$, onde h é a constante

de Planck. Simbolizando $\frac{h}{2\pi} = \hbar$,

obtemos:

$$P_{Meléc} = \frac{e}{m} L_S = \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{m},$$

denominado “Magnéton de Bohr”.

A criação (em média) de uma orientação ordenada dos momentos magnéticos de uma substância explica o fenômeno do paramagnetismo. Para explicar o diamagnetismo é preciso estudar a rotação do elétron no átomo como um fenômeno giroscópico. Os giroscópios são geralmente estudados nos cursos de mecânica.

Encontremos o momento de rotação atuante por parte do campo na órbita do elétron, que para simplificar, vamos aproximá-la de um condutor retangular (Figura 13.2). A força de Ampère

$$\vec{F} = I(\vec{a} \times \vec{b}). \quad (13.7)$$

que atua nos lados do contorno, cria o momento:

$$\vec{b} \times \vec{F} = I \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{B}). \quad (13.8)$$

Notando que o produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, obtemos

$$I \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{B}) = I \{ \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \} = I \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{B}). \quad (13.9)$$

Isto indica que o momento de rotação, na Figura 13.2, está dirigido para cima.

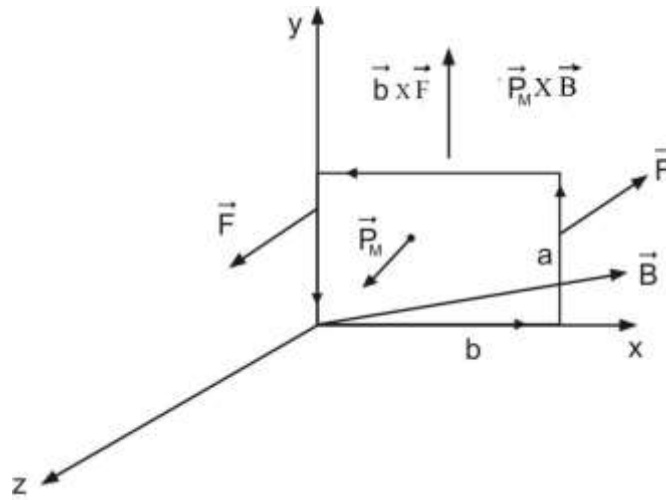


Figura 13.2

Pode-se dar outra forma à expressão (13.9) substituindo o produto ab pela letra S , que representa a área do contorno. Como se sabe, a grandeza IS , por definição, é o momento magnético $\vec{P}_M$ (fórmula (12.18)). O sentido do vetor $\vec{P}_M$ pode ser determinado pela regra do saca-rolha. Na Figura 13.2, o sentido de $\vec{P}_M$ é do plano da página para o leitor. Consequentemente, o produto vetorial $\vec{P}_M \times \vec{B}$ coincide com o momento de rotação em módulo e direção:

$$\vec{b} \times \vec{F} = \vec{P}_M \times \vec{B}. \quad (13.10)$$

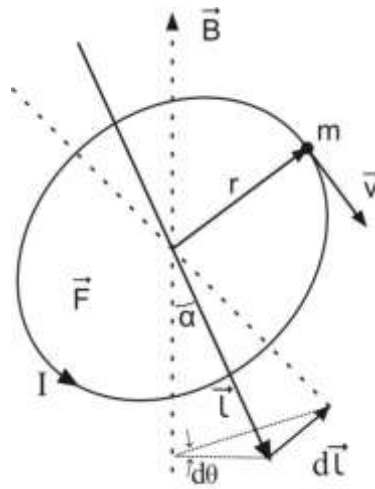


Figura 13.3

Se um elétron que gira por uma órbita circular (Figura 13.3) possui o momento mecânico orbital $\vec{L}$, então, como resultado da ação do campo magnético $\vec{B}$ na sua órbita, durante o intervalo infinitesimal de tempo dt , o momento $\vec{L}$ adquire um incremento $d\vec{L}$, cujo módulo é igual ao produto do momento de rotação pelo tempo dt (o incremento do momento angular é igual ao impulso do momento das forças externas). Vamos recordar como se demonstra isto nos cursos de mecânica. O

elemento de um corpo sólido Δm_i , que gira em torno do eixo, move-se de acordo com a 2ª lei de Newton:

$$\Delta m_i a_i = f_i$$

a_i é a aceleração, igual ao produto da distância do elemento Δm_i até o eixo de rotação r pela aceleração angular do corpo β : $a_i = r_i \beta$.

Consequentemente, $\Delta m_i r_i \beta = f_i$. Vamos multiplicar essa equação por r_i :

$$\Delta m_i r_i^2 \beta = f_i r_i.$$

Efetuada a soma para todo o corpo:

$$\beta \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i f_i r_i.$$

A soma na parte esquerda é o momento de inércia I e na parte direita é o momento de forças (torque) τ . A direção do momento de força coincide com a direção da velocidade angular, consequentemente,

$$I \cdot \vec{\beta} = \vec{\tau}.$$

Vamos encontrar a variação do momento mecânico orbital $\vec{L}$ com o tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \Delta m_i \vec{v}_i r_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \vec{\omega} r_i \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\vec{\omega} \sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\beta} = \vec{\tau} \end{aligned}$$

isto é, $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$. No problema examinado $\vec{\tau} = \vec{P}_M \times \vec{B}$ ou na forma escalar $\tau = P_M \cdot B \cdot \sin \alpha$, onde α é o ângulo entre os vetores $\vec{P}_M$ e $\vec{B}$. Consequentemente,

$$dL = P_M B \sin \alpha dt. \quad (13.11)$$

Da Figura 13.3, vê-se que essa grandeza (incremento de $\vec{L}$), geometricamente, é definida da seguinte maneira.

$$dL = L \sin \alpha dB, \quad (13.12)$$

de onde,

$$d\vartheta = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{P_M B \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \frac{P_M B}{L} dt. \quad (13.13)$$

Daqui, encontramos a velocidade angular de precessão:

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{P_M B}{L}. \quad (13.14)$$

De acordo com a fórmula (13.6), encontramos:

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \quad (13.15)$$

A expressão que acabamos de obter define o valor da velocidade angular chamada de precessão de Larmor (ou frequência de Larmor), em homenagem ao físico inglês Joseph Larmor (1857-1942), quem fez importantes trabalhos relativos ao magnetismo, após o surgimento da teoria de Maxwell.

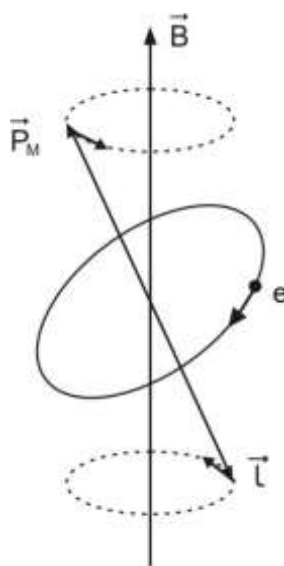


Figura 13.4

Vejamos esse mecanismo, levando em conta que a carga do elétron é negativa, isto é, o sentido da corrente é contrário ao sentido do movimento do elétron (Figura 13.4).

Nesse caso $\vec{P}_M$ e $\vec{L}$ têm sentidos contrários. Como resultado da precessão de Larmor, $\vec{P}_M$ e $\vec{L}$ descrevem um cone, ou seja, é comunicado ao elétron um movimento complementar, em conjunto com o movimento orbital. O sentido desse movimento é definido pelo sentido da precessão, o qual como

indica a Figura 13.4, é tal que cria um campo magnético contrário a $\vec{B}$, o que explica o fenômeno do diamagnetismo, de acordo com a teoria do movimento de um giroscópio.

Encontremos as condições que satisfazem as linhas de indução do campo magnético na passagem através da fronteira de separação de dois meios com diferentes permeabilidades magnéticas.

Tomemos a circulação do vetor $\vec{H}$ pelo percurso que abrange o elemento de fronteira, dl (Figura 13.5a). Vamos considerar o comprimento dos lados desse percurso, que passam pela fronteira, tendendo para zero. Então,

$$\oint_L H_t dl = I = 0, \quad (13.16)$$

pois, não existe corrente dentro do contorno. Consequentemente,

$$H_{t1} dl = H_{t2} dl = 0, \quad (13.17)$$

onde H_{t1} e H_{t2} são componentes tangenciais do vetor $\vec{H}$ na parte superior e inferior do contorno, isso é; H_{t1} e H_{t2} , correspondente. Daqui, surgem as condições de fronteira para H :

$$H_{t1} = H_{t2}. \quad (13.18)$$

A condição de fronteira para o vetor $\vec{B}$ (indução magnética, análoga ao vetor $\vec{E}$ na eletrostática), pode ser encontrada através da analogia do teorema de Gauss para $\vec{B}$. As linhas do vetor $\vec{B}$ são sempre fechadas. “Fontes” do magnetismo à semelhança das cargas elétricas não existem, por isso:

$$\oint_S B_n dS = 0, \quad (13.19)$$

ou, na forma diferencial (ver fórmula (2.22)),

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (13.20)$$

Vamos aplicar a equação (13.19) a uma superfície fechada (contorno) em forma de um paralelepípedo que inclui a fronteira de separação de dois meios com permeabilidades magnéticas μ_1 e μ_2 (Figura 13.5b).

Diminuído as faces laterais do paralelepípedo até zero, obtemos de (13.19)

$$B_{n1}S - B_{n2}S = 0, \quad (13.21)$$

ou seja,

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (13.22)$$

Daqui, temos

$$\mu_1\mu_0 H_{n1} = \mu_2\mu_0 H_{n2},$$

ou seja,

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (13.23)$$

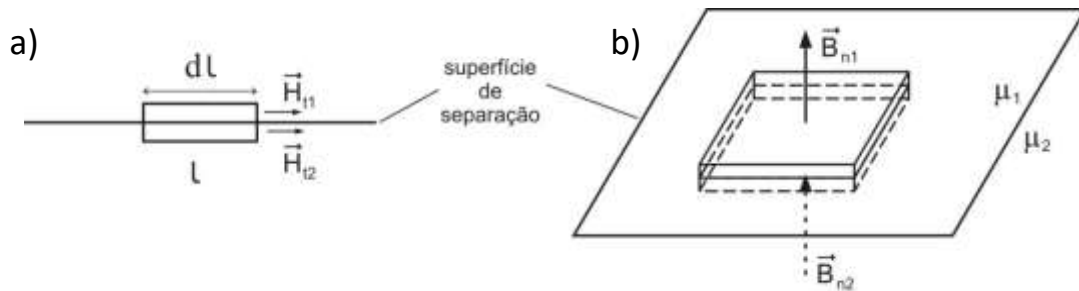


Figura 13.5

Consequentemente, as componentes normais do vetor intensidade do campo magnético $\vec{H}$ ao passar pela fronteira de separação de dois meios sofrem um salto, ou seja, são descontínuas, mas as componentes tangenciais são contínuas.

Da continuidade das componentes tangenciais de $\vec{H}$ na fronteira entre dois meios, segue que as componentes tangenciais de $\vec{B}$ na fronteira sofrem uma descontinuidade:

$$H_{t1} = \frac{B_{t1}}{\mu_1\mu_0}; \quad H_{t2} = \frac{B_{t2}}{\mu_2\mu_0}. \quad (13.24)$$

Como

$$H_{t1} = H_{t2},$$

obtemos

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (13.25)$$

Consequentemente, as componentes normais do vetor indução magnética $\vec{B}$, ao passarem pela fronteira são contínuas e as tangenciais sofrem um salto.

As relações obtidas permitem encontrar o ângulo de refração das linhas de indução (Figura 13.6).

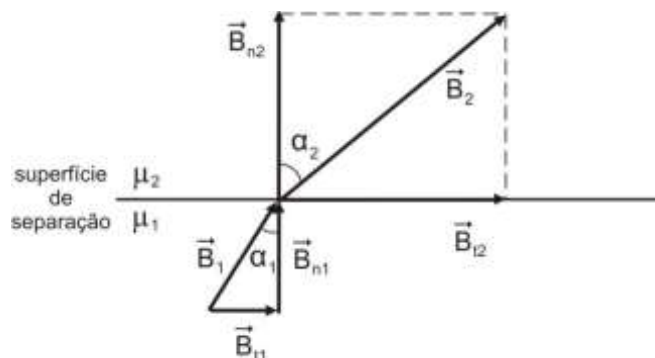


Figura 13.6

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{t1}}{B_{n1}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{t2}}{B_{n2}}, \quad (13.26)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{t1} B_{n2}}{B_{t2} B_{n1}} = \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (13.27)$$

No estudo específico das ondas eletromagnéticas, estas condições de fronteiras serão utilizadas na solução das equações de Maxwell.

CAPÍTULO 14

MOVIMENTO DAS PARTÍCULAS CARREGADAS NUM CAMPO MAGNÉTICO

Estudemos o movimento de uma partícula carregada num campo magnético uniforme. O campo magnético, de acordo com a **lei de Ampère**, exerce uma força na partícula em movimento (ou seja, na corrente). Se a partícula encontra-se em repouso, relativamente ao campo, então, ela não sofre ação de força alguma por parte do campo. Se a partícula possui a velocidade $\mathbf{v}$, então, nela atua a força de Lorentz, a fórmula (11.23), já apresentada anteriormente. Vamos escrevê-la novamente:

$$\vec{F}_L = e(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (14.1)$$

Vamos tomar uma partícula que se move de modo que a sua velocidade $\vec{v}$ esteja orientada na direção perpendicular ao campo.

$$\vec{v} \perp \vec{B} \quad (14.2)$$

então,

$$F_L = e.v.B \sin 90^\circ = evB. \quad (14.3)$$

Vamos encontrar a aceleração da partícula:

$$a = \frac{F_L}{m} = \frac{evB}{m}. \quad (14.4)$$

Essa aceleração, de acordo com a condição (14.2), é perpendicular a $\vec{v}$ e $\vec{B}$, e não varia com o tempo, se v , B e e/m são constantes. Consequentemente, realiza-se um movimento em que $v = \text{const.}$, $a = \text{const.}$ e perpendicular à velocidade. Esse movimento é circular (ou em espiral). Vamos encontrar o raio R desse círculo. Pela fórmula do módulo da aceleração centrípeta, encontramos:

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (14.5)$$

Tendo em conta (14.4), obtemos:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{e v B}{m}, \quad (14.6)$$

de onde segue que

$$R = \frac{m v}{e B}. \quad (14.7)$$

Conhecendo a velocidade v e o raio R , vamos definir o período T do movimento da partícula ao longo do círculo, isto é, o tempo de uma volta completa:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{v e B} = \frac{2\pi m}{e B}.$$

A fórmula

$$T = \frac{2\pi m}{e B}, \quad (14.8)$$

onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \frac{eB}{m}$ é a chamada frequência ciclotrônica,

confirma um fato importante: o período de rotação das partículas não depende das suas velocidades. Este fato fundamentou a ideia básica da criação do acelerador cíclico de partículas carregadas, o ciclotron. É até certo ponto curioso que a frequência de Larmor, já apresentada acima, é a metade da frequência ciclotrônica.

Imaginemos que dois semicilindros ocos encontrem-se num campo magnético (Figura 14.1) e, no espaço entre eles, seja aplicada uma diferença de potencial V .

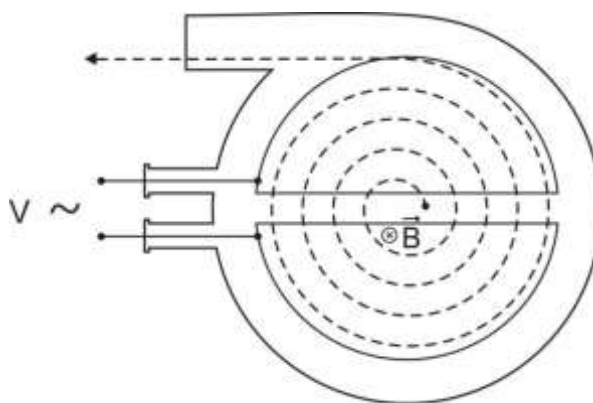


Figura 14.1

Se a partícula que se encontra no espaço entre eles, sob a ação dessa diferença de potencial aceleradora, adquire uma velocidade v , então, dentro de meio período (tempo) $T/2$, ela, depois de realizar o movimento pelo semicírculo no campo magnético, entra novamente no espaço entre os dois cilindros (chamados eletródio-D). Se nesse momento for mudado o sentido da diferença de potencial (no espaço entre os cilindros) pelo contrário, então, ocorre aceleração da partícula nesse espaço e esta entra no segundo cilindro com maior velocidade. Com isso, o seu período de rotação não varia (mas o raio aumenta) e ela, de novo, exatamente depois do intervalo de tempo $T/2$, volta àquele espaço daquele lado desde onde nós começamos a observar o seu movimento. Concordeando a frequência de variação do sentido da diferença de potencial com a frequência de rotação da partícula, nós realizamos a sua aceleração ciclotrônica.

Ao lado dos cíclotrons, na técnica moderna dos aceleradores são amplamente utilizados os fásotrons, baseados na variação da frequência da tensão aplicada e os cíncrotrons que garantem a ação aceleradores de partículas variando a indução do campo magnético $\vec{B}$. Notemos que, para grandes velocidades, a condição do sincronismo para o cíclotron (14.18) não se cumpre, pois, torna-se significativa a dependência da massa da velocidade.

Vamos encontrar, agora, o campo magnético de uma partícula carregada em movimento. De acordo com a lei de Biot e Savart, o campo elemento de corrente $I d\vec{l}$ é expresso pela fórmula (11.13):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_o}{r^2}. \quad (14.9)$$

Vamos fazer uma série de substituições.

$$I = jS = en v S,$$

$$I d\vec{l} = jS d\vec{l} = ev n dV, \quad (14.10)$$

onde $dV = S d\vec{l}$ elemento de volume.

O produto $n dV$ dá o número de partículas que criam a corrente $I d\vec{l}$, ou seja,

$$I d\vec{l} = e \vec{v} dN, \quad (14.11)$$

consequentemente,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e dN (\vec{v} \times \vec{r}_o)}{r^2}. \quad (14.12)$$

Daqui, obtemos o campo B_0 criado por uma partícula

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e v \sin \theta}{r^2}, \quad (14.13)$$

onde θ é o ângulo entre o vetor velocidade da partícula e o vetor unitário $\vec{r}_0$ que determina a direção no ponto de observação.

Vamos encontrar, como exemplo, a intensidade do campo magnético H , criado por um elétron que se move com a velocidade de 10^3 m/s , no vácuo, sendo que a distância de sua trajetória até o centro é de 10^{-8} m , que é o raio atômico médio.

Substituímos:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad \sin \theta = 1; \quad r = 10^{-10} \text{ m}; \quad H = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3}{4\pi \cdot 10^{-20}} \text{ A/m} \approx 10^3 \text{ A/m}$$

As leis do movimento das partículas carregadas no campo magnético permitem explicar o chamado efeito Hall, observado em 1879 pelo físico estadunidense, Edwin Herbert Hall (1855-1938). Esse efeito consiste em que num condutor com densidade de corrente $\vec{j}$, colocado num campo magnético $\vec{B}$, surge um campo elétrico $\vec{E}_H$ que é perpendicular a $\vec{j}$ e $\vec{B}$. Trata-se, portanto, de um efeito eletromagnético transversal. Quando da descoberta do efeito Hall, sua importância imediata foi a de mostrar que os portadores de corrente elétrica nos metais eram cargas negativas discretas. Isso era contrário ao que se supunha na época. Não se supunha que os portadores de corrente nos condutores metálicos fossem negativos, como também ainda não havia certeza que eles eram cargas discretas; muitos ainda supunham que a corrente elétrica seria um fluxo contínuo de uma substância específica. O elétron só viria a ser “descoberto” alguns anos mais tarde. Atualmente, a importância do efeito Hall, na tecnologia moderna, é muito grande.

Seja um condutor com densidade de corrente $\vec{j}$ colocado num campo magnético $\vec{B}$ que é perpendicular a $\vec{j}$ (Figura 14.2).

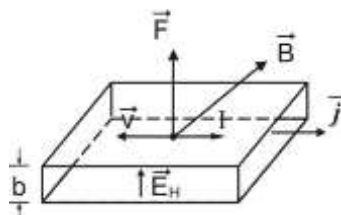


Figura 14.2

Vamos escolher a orientação perpendicular de $\vec{j}$ e $\vec{B}$ para simplificar o estudo desse fenômeno. Se o campo $\vec{B}$ não é perpendicular a $\vec{j}$, então, a conclusão que obteremos relacionar-se-á com a

componente perpendicular de $\vec{B}$. Experimentalmente, para esse caso, Hall encontrou a fórmula para o cálculo da diferença de potencial V_H que surge entre a face superior e inferior do condutor.

$$V_H = R j b B, \quad (14.14)$$

onde R é uma certa constante característica do dado condutor (constante de Hall ou coeficiente de Hall).

Examinemos esse fenômeno com base na teoria do movimento de partículas carregadas num campo magnético. Como no condutor movem-se partículas carregadas (elétrons), sobre elas, por parte do campo magnético $\vec{B}$, age a força de Lorentz (fórmula (14.1)):

$$\vec{F}_L = e(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (14.15)$$

No nosso exemplo, $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{B}$, conseqüentemente,

$$F_L = evB. \quad (14.16)$$

Contudo, $\vec{F}_L$ é perpendicular a $\vec{v}$ e a $\vec{B}$ (na Figura 14.2, F_L está dirigida para cima). Essa força é equivalente à ação da tensão elétrica aplicada na mesma direção:

$$F_L = e E_H. \quad (14.17)$$

Para o caso estacionário, conseqüentemente, é necessário o surgimento de um campo de compensação E_H , isto é, o surgimento de cargas de superfície nas faces superiores e inferiores do condutor. De (14.16) e (14.17), obtemos:

$$e E_H = evB \text{ ou } E_H = vB. \quad (14.18)$$

Expressemos v através de corrente j :

$$v = \frac{j}{ne}, \quad (14.19)$$

então,

$$E_H = \frac{jB}{en}. \quad (14.20)$$

A diferença de potencial entre as faces da amostra que se encontram a uma distância b (Figura 14.2) é definida pelo produto:

$$V_H = E_H \cdot b = \frac{j b}{e n} B = \frac{1}{e n} j b B, \quad (14.21)$$

e isso representa a relação de Hall (14.14) encontrada, experimentalmente. Com isso, contudo, nós obtivemos também a expressão para a constante de Hall, a constante R , já indicada acima :

$$R = \frac{1}{e n}. \quad (14.22)$$

O efeito Hall permite encontrar o número de portadores de corrente, por unidade de volume, n . Por isso, medindo-se a diferença de potencial V_H que surgiu como resultado do efeito Hall e substituindo na fórmula (14.2) as grandezas conhecidas B , b , j e “ e ”. A única grandeza desconhecida é n que, dessa maneira, pode ser calculada.

O físico alemão Klaus von Klitzing, nascido em 1943, recebeu o Prêmio Nobel de Física, em 1985, pela descoberta da quantização do Efeito Hall, já que esse efeito fora também observado nos semicondutores.

Na física dos semicondutores, o efeito Hall adquiriu uma importância singular, como método de determinação de n e do sinal dos portadores de cargas, o que permite tirar conclusão sobre a composição do semicondutor e a natureza das ligações químicas. Grande importância no estudo das substâncias semicondutoras adquiriu a independência que tem a constante de Hall, R , da temperatura, permitindo assim pesquisar a característica energética dos portadores de corrente. O efeito Hall encontra também outra aplicação nos detectores do campo magnético. Se todas as grandezas, menos B , na fórmula (14.21) forem conhecidas, então, ao se medir V_H , pode-se determinar a indução do campo magnético. Tais detectores são chamados detectores de Hall.

CAPÍTULO 15

LEI DA INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Desde a importante descoberta de Oersted, que se sabia que uma corrente elétrica é capaz de criar um campo magnético nas suas vizinhanças. Michael Faraday (1791-1867), químico e físico experimental inglês, de grande talento e intuição, que acreditava na simetria das leis físicas, se propôs fazer um experimento inverso, no sentido de determinar se, em determinadas condições, um campo magnético seria capaz de criar um campo elétrico. Foi assim que em 1831 ele conseguiu descobrir a lei da indução eletromagnética. Nos EUA, Joseph Henry (1797-1878), trabalhando de modo independente de Faraday, também descobriu o fenômeno da indução eletromagnética. É por isso, que a unidade de indutância no Sistema Internacional se chama henry. Embora Faraday tenha recebido pouca educação formal, ele não deixou de ser um dos mais influentes cientistas de todos os tempos. Na juventude, ele chegou a trabalhar como aprendiz de encadernador, quando teve a oportunidade de ler muitos livros que passavam por suas mãos.

Calculemos o trabalho realizado concomitante ao deslocamento de um condutor com corrente no campo magnético $\vec{B}$, dirigido desde nós, perpendicularmente, ao plano da espira. Vejamos o esquema do experimento representado na Figura 15.1.

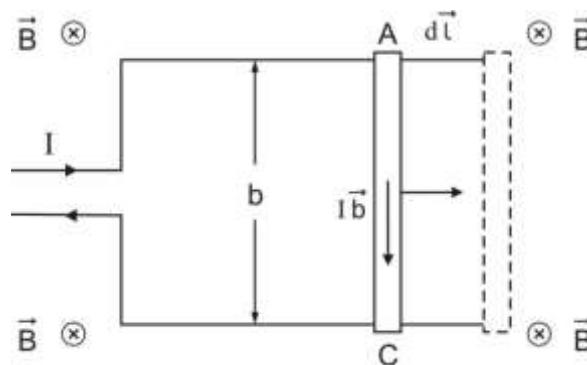


Figura 15.1

Suponhamos que a barra fina AC possa deslizar pelos lados da espira com corrente. O trabalho realizado durante o deslocamento dessa barra a uma distância dl é igual ao produto da força pelo caminho:

$$dW = F \cdot dl . \quad (15.1)$$

A força $\vec{F}$ é definida pela lei de Ampère:

$$\vec{F} = I(\vec{b} \times \vec{B}). \quad (15.2)$$

É precisamente esta força que provoca o movimento da barra AC ao lado da espira.

Considerando, que $I = \text{const}$, $B = \text{const}$ e $\vec{b} \perp \vec{B}$.

$$dW = Ib B dl . \quad (15.3)$$

Como mostra a figura, bdl é o incremento de área dS , ou seja,

$$dW = IB dS . \quad (15.4)$$

O produto BdS é o incremento do fluxo do vetor $\vec{B}$ através da área dS , representado por $d\Phi_B$:

$$d\Phi_B = B dS . \quad (15.5)$$

Para qualquer superfície, o fluxo do vetor $\vec{B}$ que passa através desta é expresso pela integral:

$$\Phi_B = \int B_n dS. \quad (15.6)$$

Para um campo uniforme, temos simplesmente

$$\Phi_B = BS_n. \quad (15.7)$$

A unidade de fluxo magnético é naturalmente o fluxo com $B_n = 1\text{T}$ e $S=1\text{ m}^2$. Esta unidade é chamada weber (Wb), em homenagem ao físico Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), amigo de Gauss e que fez importantes trabalhos em eletromagnetismo. No sistema CGSM a unidade de fluxo é o maxwell (Max), que é o fluxo de 1 gauss através de 1 cm^2 . Daqui, temos:

$$1\text{ Wb}=10^4\text{ Gs}.10^4\text{ cm} = 10^8\text{ Max} . \quad (15.8)$$

De (15.5), obtemos a expressão do campo B em termos do fluxo:

$$B = \frac{d\Phi_B}{dS}. \quad (15.9)$$

Consequentemente, a fórmula (15.4), pode ser escrita como

$$dW = Id\Phi_B. \quad (0.10)$$

Voltemos ao esquema do experimento, representado na Figura 15.1. A corrente I passa pela espira que possui contatos móveis. Como resultado, há o deslocamento de AC , ou seja, realiza-se um trabalho mecânico. Além do trabalho mecânico, no condutor é desprendido o calor de Joule, de acordo com a lei de Joule-Lenz :

$$RI^2 dt = dW_{joule}. \quad (15.11)$$

Desta maneira, no intervalo infinitesimal de tempo dt , durante o qual o lado AC desloca-se de dl , é realizado um trabalho geral:

$$dW + dW_{joule}. \quad (15.12)$$

De acordo com a lei de conservação da energia, este trabalho é realizado pela corrente (o campo magnético B é constante) e é igual à potência ($V.I$) multiplicada pelo tempo dt :

$$\begin{aligned} VI dt &= dW + dW_{joule} \\ VI dt &= Id\Phi_B + RI^2 dt, \end{aligned}$$

ou

$$V = \frac{d\Phi_B}{dt} + RI,$$

de onde

$$I = \frac{V - \frac{d\Phi_B}{dt}}{R}. \quad (15.13)$$

Esta expressão, de forma análoga à lei de Ohm, mostra que, com o deslocamento do condutor, nos seus extremos, de acordo com o esquema acima, surge uma diferença de potencial igual a $-\frac{d\Phi}{dt}$. Essa diferença de potencial, por convenção, é chamada força eletromotriz induzida. Naturalmente é preciso levar em conta que, de fato, é uma diferença de potencial e não de uma força.

Agora, podemos fazer a seguinte conclusão: Com o deslocamento de um condutor no campo magnético, nos seus extremos surge a diferença de potencial

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (15.14)$$

por convenção é cochamada de *f.e.m.* induzida (lei da indução eletromagnética de Faraday), como dissemos acima.

Se um circuito fechado move-se num campo magnético, então sob a ação da *f.e.m.* induzida, nele surge a corrente induzida:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R},$$

ou

$$I_i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (15.15)$$

Vamos esclarecer o sentido do sinal (−) nesta expressão. Para isto, analisemos a fórmula (15.12)

$$I = \frac{V}{R} - \frac{d\Phi_B}{R dt}. \quad (15.16)$$

Esta fórmula mostra que com o deslocamento da barra AC no campo magnético, a corrente total diminui, ou seja, a corrente de indução tem sentido contrário à corrente original que provoca movimento da barra AC. A chamada regra de Lenz (lei de Lenz) serve como generalização deste fato. Ela diz o seguinte: “A corrente induzida surgirá com um sentido tal que irá se opor à variação do fluxo que a produziu”. A regra de Lenz é uma consequência da lei da conservação da energia. Há toda uma série de fenômenos e efeitos físicos que ocorrem como acontece com a regra de Lenz, desde a terceira lei de Newton até o princípio de Le Châtelier, para as reações químicas.

Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865) foi um físico estoniano de etnia alemã, que adquiriu fama ao publicar esta regra qualitativa em 1834. Na época, a Estônia fazia parte do Império Russo. Ele trabalhou vários anos na Universidade de São Petersburgo, na Rússia. Segundo consta na literatura, independente de Joule, Lenz também descobriu o mesmo efeito. Por isso, às vezes o efeito Joule é chamado de efeito Joule-Lenz.

O sinal “menos” serve também para indicar a presença da regra de Lenz. Consequentemente, se uma espira fechada move-se num campo magnético de tal forma que o fluxo que atravessa a mesma varia, então, no circuito surge uma corrente induzida de sentido tal que origina uma reação ao deslocamento.

É fácil determinar a direção da corrente induzida, pela disposição das linhas de força do campo magnético. Por exemplo, se girarmos uma espira no campo magnético no sentido horário (Figura 15.2), deverá surgir uma ação contrária, ou seja, a corrente na espira vai ser de tal forma que na parte superior da mesma as linhas de indução sejam mais densas dentro da espira que fora dela.

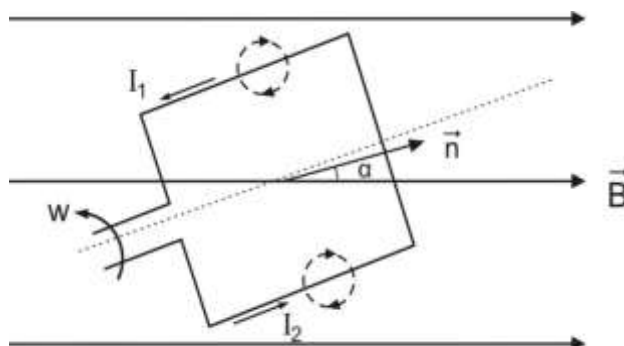


Figura 15.2

Em outras palavras, dentro da espira (na sua parte superior) as linhas de indução do campo criado pela corrente induzida e do campo constante $\vec{B}$ devem somar-se, enquanto fora dela subtrair-se. De acordo com a regra do saca-rolha (regra da mão direita) a corrente que cria o campo deve passar na parte superior da espira com sentido para o leitor e na inferior desde o leitor.

Este fenômeno pode ser interpretado do ponto de vista da variação do fluxo. A espira move-se de tal forma que o fluxo do campo magnético $\vec{B}$ que a atravessa diminui, isto é, ela passa da posição paralela às linhas do campo $\vec{B}$ à posição paralela a este campo.

De acordo com a regra de Lenz, a corrente induzida deve atuar de modo que contrarie a variação do fluxo (diminuição deste, nesse caso). Consequentemente, o sentido da corrente induzida deve ser tal que o fluxo do campo magnético induzido aumente o campo $\vec{B}$, somem-se dentro da espira.

Examinamos o caso do movimento de uma espira quadrada (ou solenoide) num campo uniforme (Figura 15.3).

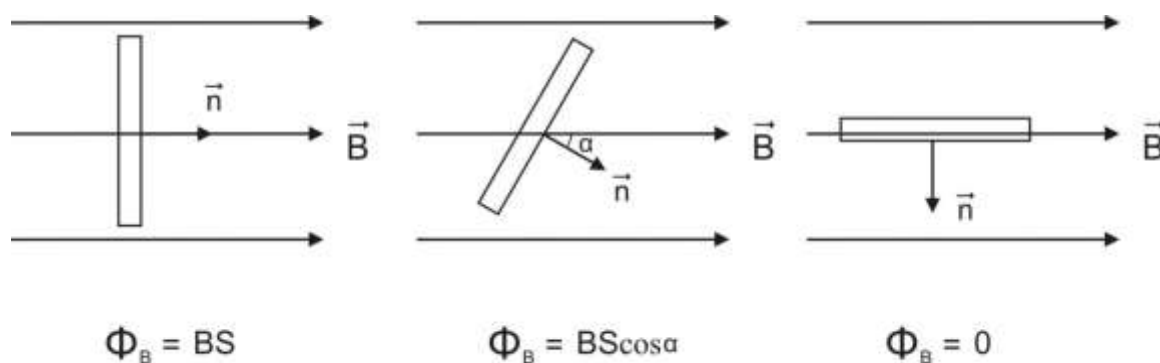


Figura 15.3

Determinemos o fluxo através da área limitada pela espira. Este fluxo é determinado pela orientação da mesma, se ela se encontra no plano das linhas de indução, o fluxo através dela é igual a

zero. Quando a espira é perpendicular às linhas, o fluxo é máximo. Em qualquer posição, o fluxo é igual ao produto de B_n (componente do campo $\vec{B}$ normal à espira) pela área da espira.

$$\Phi_B = BS \cos \alpha, \quad (15.17)$$

onde α é o ângulo entre o vetor $\vec{B}$ e a normal $\vec{n}$ ao plano da espira.

Se a espira gira no campo magnético com velocidade angular constante ω , então

$$\alpha = \omega t, \quad (15.18)$$

e, conseqüentemente,

$$\Phi_B = BS \cos \omega t. \quad (15.19)$$

De acordo com a lei da indução eletromagnética (15.13), encontramos a *f.e.m.* induzida:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BS (-\omega \sen \omega t) = \omega BS \sen \omega t. \quad (15.20)$$

e, conseqüentemente, a *f.e.m.* induzida varia em senoide com o tempo:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \sen \omega t, \quad (15.21)$$

onde ε_0 é o valor da amplitude da *f.e.m.* induzida:

$$\varepsilon_0 = \omega BS. \quad (15.22)$$

Notemos que o ângulo $\alpha = \omega t$ foi contado a partir da posição paralela da espira. Nesse momento, o fluxo Φ_B é igual a zero, pois, $\cos \alpha = 1$, mas a *f.e.m.* induzida é máxima, pois $\sen \alpha = 1$. Na realidade, no momento em que a espira passa pela posição paralela, há a maior variação do fluxo através da espira; o fluxo varia mais rapidamente no momento em que há o corte das linhas magnéticas pelos lados da espira.

Outra posição limite da espira é $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ou seja; quando a superfície da espira é perpendicular às linhas do campo $\vec{B}$, caracterizada pelo fato de que nesta posição o fluxo Φ_B através da espira é máximo e sua variação é mínima (se os lados da espira deslizassem pelas linhas de indução o fluxo dentro desta permaneceriam quase constante).

Se no lugar de uma espira for colocado um solenoide no campo magnético, então, na expressão para a força eletromotriz induzida entra o número de espiras N do solenoide:

$$\varepsilon_i = \omega B S N \sin \alpha t, \quad (15.23)$$

pois, em cada espira é criada uma *f.e.m.* induzida e todas as espiras estão ligadas em série.

Da fórmula (15.13) conclui-se que uma *f.e.m.* induzida igual a 1 volt surge com a variação do fluxo de um weber por segundo.

Uma das consequências do fenômeno da indução magnética é o surgimento da chamada corrente de Foucault, ou corrente rotacional nos corpos metálicos rígidos que se movem no campo magnético de tal forma que o fluxo do campo que as corta varia.

Se, por exemplo, entre dois pólos de um ímã for introduzida rapidamente, uma placa metálica, então, pode-se sentir uma reação contrária ao seu movimento. Na placa, devido o campo não ser uniforme e o fluxo através da mesma não variar, surge uma corrente que cria tal campo magnético que tem ação contrária à variação do fluxo magnético que atravessa a área da placa.

Notemos que a rotação de um cilindro rígido no campo magnético (Figura 15.4a) conduz ao surgimento de uma diferença de potencial entre o eixo e a superfície do cilindro. Neste caso, a parte do cilindro entre os contatos A e C é a parte móvel do contorno que corta as linhas de indução. Por outro lado, além desse fenômeno, aqui, é necessário ter em conta a força de Lorentz que dá origem ao deslocamento dos elétrons dentro do cilindro, o que também provoca o surgimento da corrente.

O fenômeno da indução magnética é utilizado para medir o valor da indução magnética. Se no campo magnético B for introduzida uma espira ligada a um galvanômetro (Figura 15.4b) e girá-la rapidamente, desde a posição paralela à vertical, então, o fluxo durante o tempo de rotação varia desde zero a BS , sendo S a área da espira.

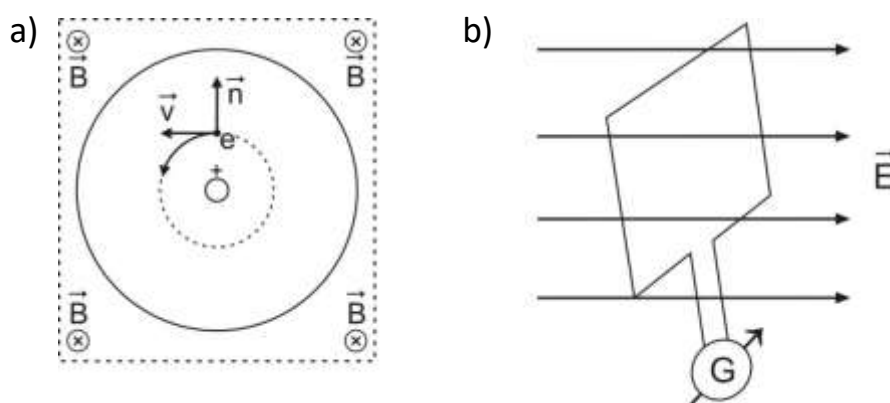


Figura 15.4

Surge uma *f.e.m.* induzida E_i e conseqüentemente, a corrente $I = \frac{\varepsilon_i}{R}$, onde R é a resistência total do circuito. De acordo com a lei da indução magnética, temos:

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_B}{dt} \text{ ou } I dt = -\frac{d\Phi_B}{R}.$$

Na parte esquerda desta equação está uma grandeza que é igual à carga média medida pelo galvanômetro:

$$q = -\frac{d\Phi_B}{R} = -\frac{BS}{R}. \quad (15.24)$$

Encontramos B ao medirmos a carga q por meio do galvanômetro, conhecendo S , que é a superfície da espira, e R , resistência total.

CAPÍTULO 16

AUTO-INDUÇÃO

O fenômeno da indução eletromagnética consiste em que qualquer variação do fluxo magnético que atravesse um circuito condutor cria uma corrente de indução neste circuito. Contudo, a variação do fluxo magnético também ocorre no caso em que o valor da corrente que passa pelo circuito varia, mesmo que não haja nenhum campo magnético externo. Examinaremos um condutor com corrente (Figura 16.1).

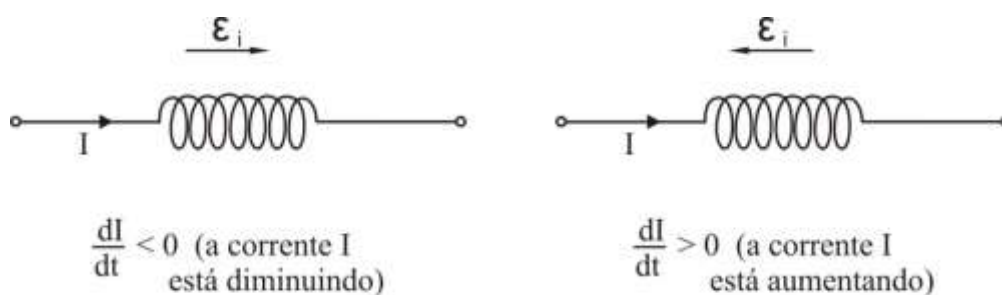


Figura 16.1

Se a corrente I é constante, então o campo magnético B também é constante e é definido pela lei de Biot-Savart. Se a corrente I é função do tempo $I = f(t)$, então, a sua variação no tempo cria uma variação do campo magnético $\vec{B}$, isto é, a variação do fluxo Φ_B que atravessa o circuito. Consequentemente, de acordo com a lei da indução eletromagnética e a regra de Lenz, no condutor deve surgir uma *f.e.m.* induzida que cria uma corrente suplementar que impede a variação da corrente original: se a corrente diminui, a corrente induzida tem o mesmo sentido da corrente original; se a corrente I aumenta, a corrente induzida está dirigida em sentido contrário. Esse fenômeno de ação indutora da corrente em si mesma chama-se auto-indução.

No caso analisado, a *f.e.m.* induzida é definida pelas seguintes condições. O fluxo magnético criado pela corrente depende do valor da corrente I , da forma do condutor (por exemplo, se o condutor é linear, circular ou forma uma bobina - solenoide) e também se o condutor está isolado ou nele influem condutores vizinhos, nos quais pode surgir corrente de indução.

Examinamos a influência da forma do condutor na *f.e.m.* induzida surgida com a variação da corrente no condutor, que é denominada “auto-indução”.

Em todos os casos, como sabemos, de acordo com a lei de Biot e Savart, o campo magnético das correntes é proporcional ao valor da corrente, isto é, podemos expressar o fluxo magnético como uma grandeza proporcional à corrente:

$$\Phi_B = L I, \quad (16.1)$$

onde L é um coeficiente de proporcionalidade que depende da forma do condutor e é chamado “indutância” do condutor (às vezes, é chamado “coeficiente de auto-indução”). A escolha da letra L para representar a indutância é uma homenagem a Lenz. Vamos encontrar a *f.e.m.* de auto-indução pela fórmula de Faraday:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (16.2)$$

Agora, vamos estabelecer o sentido físico, a dimensão e a unidade de medida da grandeza L que caracteriza o condutor.

Se, pela sua forma, no condutor dI/dt é igual à unidade, isto é; com a variação de corrente em 1 ampère durante um segundo, surge a *f.e.m.* de auto-indução $\mathcal{E}_i$ igual a 1 volt, então, a indutância do condutor (solenóide) é igual à unidade. Essa unidade tem o nome de henry (H).

Vamos expressar a dimensão da unidade da indutância (henry) através da dimensão de outras grandezas mecânicas, elétricas e magnéticas.

De (16.2), segue:

$$[H] = \frac{[\mathcal{E}_i]}{[I]} [t] = \frac{V.s}{A}. \quad (16.3)$$

Vamos substituir no lugar de volt, a sua dimensão expressa através de outras grandezas:

$$[V] = \frac{N.m}{C} = \frac{N.m}{A.s}, \quad (16.4)$$

logo,

$$[H] = \frac{N.s.m}{A.s.A} = \frac{N.m}{A^2}. \quad (16.5)$$

Este resultado ajuda a expressar a dimensão da permissividade magnética μ_0 através da unidade de indutância (henry). A dimensão de μ_0 é fácil definir através da expressão de força com a qual interagem duas correntes paralelas a uma distância b (fórmula(10.10)).

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b}, \quad (16.6)$$

Notando que a dimensão de força por unidade de comprimento nesta fórmula é N/m, encontramos:

$$[\mu_0] = \frac{N}{A^2}. \quad (16.7)$$

Comparando com a fórmula (16.5), obtemos:

$$[\mu_0] = \frac{H}{m}. \quad (16.8)$$

No sistema *CGSM* a unidade de indutância foi definida a partir da seguinte relação:

$$[L] = \frac{[\Phi_B]}{[I]} = \frac{[B][s]}{[I]} = \frac{[B][l^2]}{[I]} = \frac{\left[\frac{I}{l}\right][l^2]}{[I]} = [l].$$

Desta maneira, no sistema *CGSM* a indutância é medida em centímetros. Vamos encontrar a relação entre o henry e o centímetro:

$$1H = \frac{1Wb}{1A} = \frac{10^8 Max}{10^{-1}CGSM} = 10^9 cm. \quad (16.9)$$

Para certos casos, o valor de L pode ser encontrado facilmente por meio de um cálculo. A esses casos relaciona-se o solenoide (bobina), um dos elementos mais utilizados nos esquemas radiotécnicos.

Como sabemos, para um solenoide suficientemente grande, o valor da indução magnética é definida pela fórmula (ver fórmula (12.16))

$$B = \mu \mu_0 H = \mu \mu_0 nI ,$$

onde n é o número de espiras por unidade de comprimento.

Se a *f.e.m.* induzida surge na bobina, então ela é igual à soma das *f.e.m.* de cada espira, por isso, o cálculo da *f.e.m.* nos extremos da bobina pode ser substituído pelo cálculo da *f.e.m.* para uma espira, mas para a bobina o fluxo deve ser multiplicado pelo número de espiras N . Se o comprimento da bobina é l , então, o fluxo é definido pela grandeza:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= NBS = nlBS, \\ \Phi_B &= \mu \mu_0 n^2 l SI,\end{aligned}\tag{16.10}$$

consequentemente, a indutância L do solenoide é igual à grandeza:

$$L = \mu \mu_0 n^2 l S.\tag{16.11}$$

Vamos encontrar essa grandeza para um exemplo concreto. Tomamos uma bobina cujo comprimento mede 20 cm , secção transversal de 100 cm^2 , número de espiras 200 (Figura 16.2).

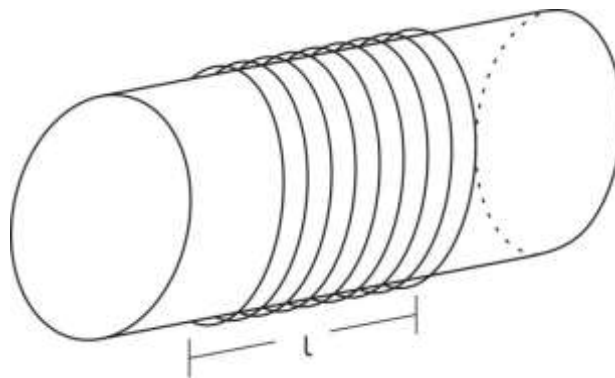


Figura 16.2

Vamos calcular a sua indutância no vácuo (ou no ar).

$$\begin{aligned}L &= \mu \mu_0 n^2 l S = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 0,01 = \\ &= 8\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = \\ &= 8\pi \cdot 10^{-4} H = \\ &= 8\pi \cdot 10^5 cm\end{aligned}$$

Como se pode ver nesse exemplo, a unidade de indutância (henry) é muito grande, para a medição da indutância de bobinas típicas da radiotécnica. Por isso, na prática, habitualmente, são utilizadas unidades menores: o milihenry ($1mH = 10^{-3} H$) e o microhenry ($1\mu H = 10^{-6} H$).

Da fórmula que define a *f.e.m.* induzida:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

segue que, para o fenômeno da auto-indução, o valor desta *f.e.m.* pode ser calculada pela derivada do produto do coeficiente L pela corrente:

$$\Phi_B = L I ,$$

isto é ;

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt}(L.I) = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \quad (16.12)$$

Se a grandeza L depende da corrente, o que é típico para os materiais ferromagnéticos, então:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dI} \frac{dI}{dt}, \quad (16.13)$$

A fórmula (16.12) toma a seguinte forma:

$$\varepsilon_i = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right) \frac{dI}{dt}. \quad (16.14)$$

Desta maneira, a *f.e.m.* auto-induzida depende da grandeza $I\frac{dL}{dI}$. Para uma bobina com núcleo, ela pode ser muito grande e criar uma corrente de indução significativa.

Examinemos o surgimento de corrente auto-induzida ao fechar e abrir um circuito elétrico. Vejamos o esquema representado na Figura 16.3.

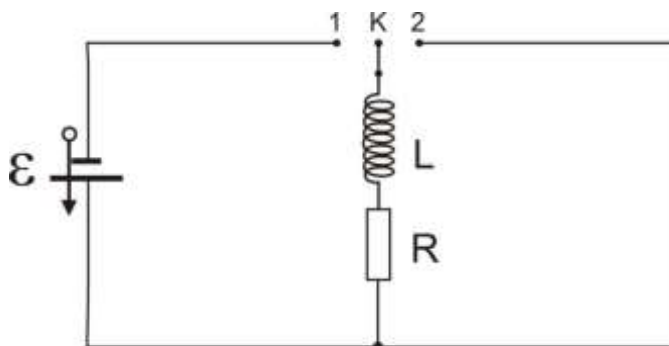


Figura 16.3

Neste circuito, temos uma bobina com indutância L , uma resistência R , uma fonte de energia ε e um comutador K , para fechar e abrir o circuito (contatos 1 e 2, respectivamente). No momento em que se desliga a fonte ε (o comutador passa do contato 1 para o 2) na bobina L o fluxo magnético começa a diminuir, isto é, nos extremos do circuito surge uma diferença de potencial:

$$\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt},$$

criada pela corrente induzida e igual à queda de tensão na resistência:

$$IR = -L \frac{dI}{dt}. \quad (16.15)$$

Nosso objetivo agora é resolver essa equação diferencial. Para isto, vamos escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt. \quad (16.16)$$

de onde obtemos:

$$\int \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int dt. \quad (16.17)$$

ou

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + \ln C. \quad (16.18)$$

Consequentemente,

$$I = Ce^{-\frac{R}{L} t}. \quad (16.19)$$

Portanto, depois de desligar a fonte ε , no circuito continua a existir uma corrente, que decresce exponencialmente (Figura 16.4).

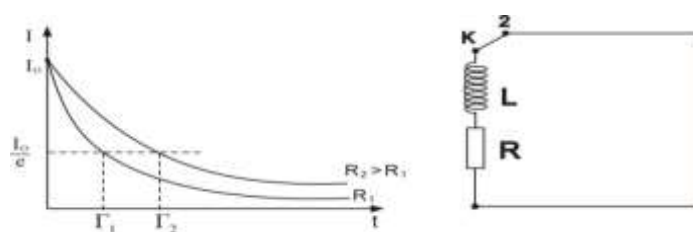


Figura 16.4

Se no instante em que se desliga ($t = 0$) a corrente era igual a I_0 , então,

$$I_0 = C \left[e^{-\frac{R}{L}t} \right]_{t=0} = C. \quad (16.20)$$

Vamos encontrar o o intervalo de tempo τ , durante o qual, depois de se desligar, a corrente diminui de $e = 2,72$ vezes, isto é,

$$I = \frac{1}{e} I_0;$$

$$\frac{1}{e} I_0 = I_0 e^{-\frac{R}{L}\tau},$$

isto é;

$$1 = e \cdot e^{-\frac{R}{L}\tau} = e^{1 - \frac{R}{L}\tau}. \quad (16.21)$$

de onde segue que

$$1 - \frac{R}{L}\tau = 0 \quad \text{e} \quad \tau = \frac{L}{R}. \quad (16.22)$$

A grandeza τ é chamada “constante de tempo”. Ela caracteriza a velocidade de decréscimo da corrente. Quanto maior for a indução da bobina e quanto menor a resistência, tanto mais lentamente decorre o processo de decréscimo da corrente.

Vejamos, agora, o processo do fechamento do circuito da corrente, isto é, a passagem do comutador da posição 2 (Figura 16.3) para a posição 1. No momento de fechamento e nos momentos posteriores atuam duas *f.e.m.*: da fonte ε e da indução ε_i , consequentemente, de acordo com a lei de Ohm

$$IR = \varepsilon + \varepsilon_i = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}, \quad (16.23)$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L}. \quad (16.24)$$

Esta é uma equação diferencial linear não homogênea. De acordo com um teorema concernente às equações diferenciais não homogêneas, a sua solução é a soma da solução geral da equação diferencial

homogênea (a parte direita é igual a zero) e de uma solução particular da equação não homogênea (a parte direita é diferente de zero). A solução geral da equação homogênea é conhecida:

$$I_{\text{hom.}} = Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad (16.25)$$

e a solução particular, encontramos facilmente, tendo em vista que a parte direita da equação diferencial acima é constante. Sendo assim, a solução particular também é constante:

$$I_{\text{part.}} = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (16.26)$$

Consequentemente, a solução procurada tem a forma:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}. \quad (16.27)$$

Tomando $t = 0$ a corrente $I = 0$ (momento da ligação, $t = 0$), obtemos

$$C = -\frac{\varepsilon}{R}, \quad (16.28)$$

de onde segue que

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (16.29)$$

O gráfico do aumento da corrente no circuito com indutância está representado na Figura 16.5.

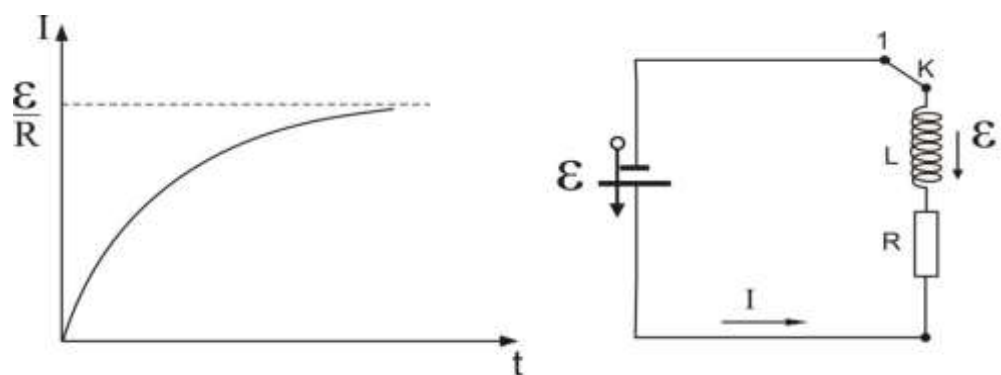


Figura 16.5

CAPÍTULO 17

CONSEQUÊNCIAS DA LEI DA INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

As relações fundamentais que descrevem o fenômeno da indução eletromagnética e da auto-indução permitem encontrar a expressão para a energia do campo magnético.

Examinemos o caso em que ocorre uma variação do fluxo magnético tal que a corrente varia desde I até zero. Durante esse processo, no decorrer do tempo dt , realiza-se o trabalho elementar

$$dW = \varepsilon_i I dt, \quad (17.1)$$

ou

$$dW = -\frac{d\Phi_B}{dt} I dt = -I d\Phi_B. \quad (17.2)$$

Substituindo $d\Phi_B = L dI$, obtemos

$$dW = -L I dI, \quad (17.3)$$

de onde

$$W = -L \int_I^0 I dI = \frac{L I^2}{2}. \quad (17.4)$$

Para encontrar a densidade de energia do campo magnético, vamos ter em conta que conhecemos a indutância L de um solenoide e que o campo no interior desse solenoide pode ser considerado uniforme e relacionado com a corrente pela fórmula:

$$H = n I. \quad (17.5)$$

Substituindo na fórmula (17.4) a corrente obtida de (17.5) e a indutância L (fórmula (16.11)), obtemos:

$$W = \frac{\mu \mu_0 n^2 l S \frac{H^2}{n^2}}{2} = \frac{1}{2} \mu \mu_0 l S H^2. \quad (17.6)$$

Tendo em conta que $lS = V$ é volume do solenoide, obtemos para a densidade de energia, isto é, a energia do campo magnético por unidade de volume, a grandeza:

$$w = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2. \quad (17.7)$$

Essa expressão é geralmente escrita de outra forma:

$$w = \frac{H \cdot \mu \mu_0 H}{2} = \frac{HB}{2}. \quad (17.8)$$

Examinemos o trabalho que é gasto na magnetização de um ferromagnético.

Seja colocado num solenoide bastante longo um núcleo ferromagnético. Se uma corrente I percorre o enrolamento do solenoide, na sua região interior cria-se um campo magnético

$$H = nI. \quad (17.9)$$

As propriedades magnéticas dos corpos magnéticos dependem, além dos tratamentos térmicos e mecânicos, também das magnetizações precedentes. A fim de observar esta dependência das magnetizações precedentes, é preciso mostrar os resultados de um ensaio experimental sobre um diagrama. O diagrama será construído marcando nas abscissas os valores da intensidade do campo indutor H e nas ordenadas os valores da indução magnética B , que o corpo adquire progressivamente quando o campo magnetizante varia segundo determinada sucessão de valores.

O material se magnetiza aos poucos, variando os valores da indução B , conforme indica a curva tracejada (Figura 17.1).

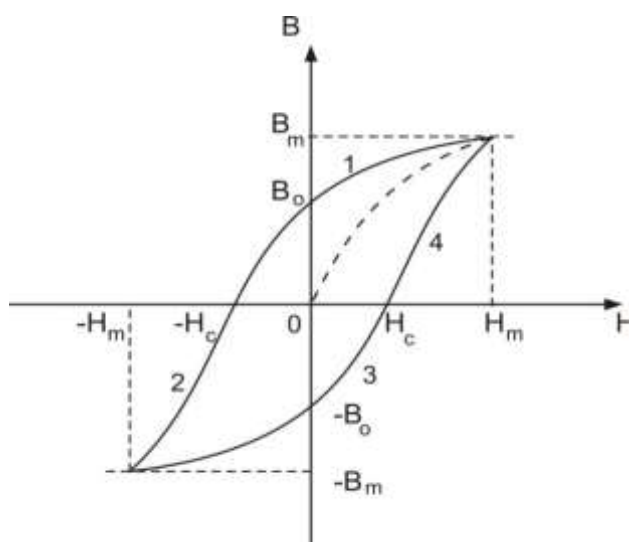


Figura 17.1

Em correspondência ao valor H_m do campo magnetizante, a indução, tendo alcançado o valor B_m não aumenta mais de forma perceptível. A partir desse ponto, mesmo aumentando consideravelmente o campo indutor, o valor da indução magnética não varia mais de forma apreciável. Nestas condições se diz que o material alcançou o estado de saturação magnética.

Em seguida, faz-se diminuir o campo indutor gradativamente de H_m até zero. A indução magnética diminui conforme a linha (1), mantendo para cada valor do campo indutor valores superiores aos que ela alcançou na fase da subida. Quando o valor do campo indutor é zero, a amostra de prova possui ainda a magnetização B_0 , que se chama magnetização residual. Torna-se visível que, na fase de descida, os valores da indução B variam com certo atraso em relação aos valores alcançados na fase de subida. Deste fato provém o nome histerese, que no grego quer dizer atraso, retardo. Já vimos o fenômeno da *histerese* quando estávamos abordando os materiais ferroelétricos.

A histerese que é típica dos materiais ferromagnéticos é de grande importância nos mais variados domínios da atividade industrial moderna. Ela já encontrou aplicação nas fitas de gravação e na produção de discos de vinil, nos discos rígidos dos computadores, nos cartões de créditos, e por aí vai.

Para anular o magnetismo residual, é preciso inverter a corrente no solenoide, de maneira que o campo indutor inverta seu sentido, adquirindo valores negativos com respeito aos precedentes. O valor da intensidade de campo indutor $-H_0$ necessário para anular o magnetismo residual, chama-se força coercitiva.

Fazendo variar a intensidade do campo indutor até o valor $-H_m$ (igual e contrário de H_m), a indução magnética aumenta, conforme a linha (2) até alcançar o valor $-B_m$ (igual e contrário a B_m), verifica-se a saturação do material.

Deste ponto, reconduzindo o campo indutor gradativamente a zero, a indução magnética diminui, conforme a linha (3) até o valor $-B_0$ igual e oposto ao precedente valor B_0 .

Invertendo o campo indutor e fazendo-o crescer até H_m a indução magnética aumenta do valor $-B_0$ até o valor B_m , conforme a linha (4).

A curva assim construída chama-se ciclo de histerese.

A natureza física do ferromagnetismo consiste em que as substâncias ferromagnéticas são constituídas de regiões de magnetização total, chamadas domínios.

Num campo magnético externo, os domínios orientam-se segundo o campo e acrescentam a este um campo magnético forte. A origem dos próprios domínios está relacionada com os spins dos elétrons que, em determinadas condições, de acordo com as leis da mecânica quântica, podem orientar-se paralelamente um ao outro. Na ausência de um campo externo, os domínios possuem uma orientação caótica e o momento magnético do corpo é igual a zero.

O campo externo orienta os domínios e esta orientação, em parte, se conserva, depois de desligado o campo indutor, o que explica o fenômeno de magnetização residual, e conseqüentemente, a histerese.

Os domínios possuem a dimensão de cerca de $10^{-4} - 10^{-3} \text{ cm}$, isto é, podem ser observados com auxílio de um microscópio.

Se a substância ferromagnética for aquecida, com o aumento da temperatura, o movimento térmico suscita uma desordenação dos domínios e, quando se atinge determinada temperatura, a substância perde suas propriedades ferromagnéticas. A temperatura crítica de passagem do ferromagnetismo ao paramagnetismo chama-se ponto de Curie (T_C). Para o ferro, por exemplo, ela é igual a 768°C . Do ponto de vista termodinâmico, a passagem de um material do estado ferromagnético para o estado paramagnético é uma transição de fase de segunda ordem. Uma transição de fase de segunda ordem é caracterizada por ser uma espécie de salto abrupto, ocorrendo ao mesmo tempo em todo o volume da substância, resultante da mudança de simetria de sua rede cristalina.

Se a temperatura da substância toma valores acima do ponto de Curie, é válida a lei de Curie-Weiss:

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C}, \quad (17.10)$$

onde χ_m é a susceptibilidade magnética de um quilograma-átomo, C é a constante de Curie, que depende das propriedades da substância e T é a temperatura absoluta.

Para as substâncias paramagnéticas, esta fórmula toma a expressão da lei de Curie, já vista no capítulo 12:

$$\chi_m = \frac{C}{T}. \quad (17.11)$$

Por isso, pode-se dizer que todas as substâncias a altas temperaturas são diamagnéticas ou paramagnéticas. No tocante à Lei de Curie, Langevin pôde concluir que a constante C , para um mol de substância, é diretamente proporcional ao quadrado do momento magnético intrínseco da molécula, multiplicado pelo número de Avogadro e inversamente proporcional ao produto da constante de Boltzmann multiplicada por três. De modo que $\chi_m = N\mu^2/3kT$. Em 1907, a teoria de Langevin foi desenvolvida por Pierre Weiss, para dar conta do ferromagnetismo.

Agora, vamos calcular o trabalho gasto na magnetização de um ferromagnético pela fórmula:

$$dW = Id\Phi_B. \quad (17.12)$$

Para um solenoide, o fluxo elementar $d\Phi_B$ é definido pela expressão:

$$d\Phi_B = n l S dB, \quad (17.13)$$

onde n é o número de espiras por unidade de comprimento e $n.l = N$, número total de espiras, S é a área de uma espira.

Substituindo (17.13) em (17.12) e expressando a corrente I de (17.9), obtemos:

$$dW = \frac{H}{n} n l S dB, \quad (17.14)$$

ou

$$dW = H dBV, \quad (17.15)$$

onde $V = lS$, volume do solenoide. Consequentemente, por unidade de volume, obtemos o trabalho

$$W = \oint H dB, \quad (17.16)$$

isto é; o trabalho de magnetização é numericamente igual à área limitada pela curva da *histerese* (ver Figura 17.1). Portanto, devido à *histerese* este trabalho não é nulo.

A variação do fluxo magnético que cria a *f.e.m.* induzida pode ser obtida naqueles casos em que o fluxo magnético criado pela corrente em um circuito atravessa outro.

Se, por exemplo, um solenoide encontra-se dentro de outro solenoide, então, a variação da corrente num deles cria corrente no outro. Eles são cortados pelo fluxo magnético comum e a sua variação cria uma corrente induzida.

Examinemos, por exemplo, o esquema representado na Figura 17.2.

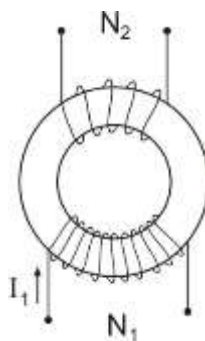


Figura 17.2

Num núcleo anelar de ferro estão enroladas duas bobinas com número de espiras N_1 e N_2 . Se a bobina N_1 for percorrida por corrente então, um campo magnético surge também dentro da bobina N_2 , pois, o fluxo magnético está dirigido ao longo do núcleo de ferro. Esse fluxo magnético Φ_{B2} , no

caso geral, representa parte do fluxo magnético Φ_{B1} , criado pela bobina N_1 . Vamos introduzir o coeficiente de proporcionalidade entre Φ_{B2} e a corrente I_1 na bobina N_1 .

$$\Phi_{B2} = M_{21}I_1. \quad (17.17)$$

Esse coeficiente de proporcionalidade, para os casos análogos aos estudados, chama-se coeficiente de indução mútua.

Neste caso, a grandeza M_{21} pode ser encontrada facilmente:

$$\Phi_{B2} = BSN_2 = \mu\mu_0HSN_2. \quad (17.18)$$

Para a circulação de H pelo eixo do núcleo, temos:

$$Hl = N_1I_1, \quad (17.19)$$

isto é,

$$H = \frac{N_1I_1}{l}. \quad (17.20)$$

Consequentemente,

$$\Phi_{B2} = \mu\mu_0N_1N_2\frac{S}{l}I_1, \quad (17.21)$$

de onde, obtemos

$$M_{21} = \mu\mu_0N_1N_2\frac{S}{l}. \quad (17.22)$$

Para encontrar o valor das correntes induzidas criadas pela variação do fluxo magnético de um circuito imerso no campo de outro, é preciso, desta maneira, conhecer o coeficiente de indutância mútua desses circuitos.

O esquema representado na Figura 17.2 é de um transformador que se destina a aumentar (diminuir) a tensão alternada.

De fato, considerando o fluxo $\Phi_{B1} = \Phi_{B2} = \Phi_B$, isto é, as linhas de indução magnética não saem dos limites do núcleo, então,

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d(BS)}{dt}N_1,$$

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d(BS)}{dt}N_2,$$

de onde se conclui que

$$\frac{\varepsilon_{i1}}{\varepsilon_{i2}} = \frac{N_1}{N_2}, \quad (17.23)$$

isto é, a tensão nos terminais de uma bobina é tantas vezes maior que a tensão na outra, quantas vezes é maior o seu número de espiras.

Notemos que na construção de transformadores, leva-se em conta a eliminação das correntes de Foucault que surgiriam no processo de variação do fluxo magnético em um núcleo magnético, em um núcleo rígido de ferro. Para evitar as correntes de Foucault, o núcleo dos transformadores é feito de lâminas isoladas uma da outra e não de um metal massivo.

Para concluir, vamos encontrar o fluxo magnético no núcleo de uma bobina.

Encontremos a circulação de H pelo circuito, incluindo o eixo do núcleo (comprimento total l) e a sua continuação na fenda (de largura l_1) conforme indica a Figura 17.3.

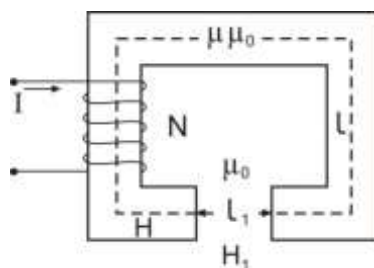


Figura 17.3

$$Hl + H_1 l_1 = NI. \quad (17.24)$$

$$H_C = \frac{\Phi_B}{\mu \mu_0 S}, \quad H_1 = \frac{\Phi_B}{\mu_0 S}, \quad (17.25)$$

$$\frac{\Phi_B}{\mu \mu_0 S} l + \frac{\Phi_B}{\mu_0 S} l_1 = NI. \quad (17.26)$$

Desta relação, obtemos a fórmula para encontrar Φ_B :

$$\Phi_B = \frac{NI}{\frac{l}{\mu \mu_0 S} + \frac{l_1}{\mu_0 S}}. \quad (17.27)$$

Esta relação é válida para qualquer número de partes que constituam o núcleo com diferentes valores de μ . Ela tem o nome de fórmula de Hopkinson.

Notemos que no tocante à sua estrutura, ela lembra a lei de Ohm. Se NI for chamado de força magnetomotriz, $\mathcal{E}_m$, e $\frac{l}{\mu\mu_0S} + \frac{l_1}{\mu_0S}$ de resistência magnética do circuito, R_m , então,

$$\Phi_B = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m}. \quad (17.28)$$

CAPÍTULO 18

CORRENTE ALTERNADA

Como sabemos, com a rotação uniforme de uma espira imersa num campo magnético, o fluxo Φ_B que atravessa o plano da espira varia com o tempo segundo a lei:

$$\Phi_B = BS \cos \omega t . \quad (18.1)$$

A *f.e.m.*, induzida, de acordo com a lei de Faraday, é igual à primeira derivada do fluxo pelo tempo, tomada com o sinal contrário, em conformidade com a regra de Lenz:

$$\varepsilon_i = - \frac{d \Phi_B}{d t} = -BS (-\omega \sin \omega t) = +\omega BS \sin \omega t . \quad (18.2)$$

Vamos representar o valor da amplitude da *f.e.m.* através de $\varepsilon_o = + \omega BS$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_o \sin \omega t$$

Pela mesma lei vai variar a *f.e.m.* induzida em uma bobina localizada perto de um ímã que gira (Figura 18.1).

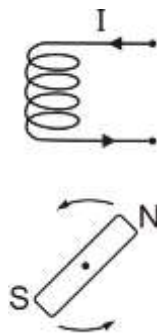


Figura 18.1

A construção dos geradores de corrente alternada baseia-se neste princípio. Naturalmente, a rotação de um ímã faz variar o campo, alternadamente, em todas as partes do espaço circundante, por isso, para a construção de um gerador de corrente alternada, é mais vantajoso tomar várias bobinas, como é mostrado, por exemplo, na Figura 18.2.

Como mostra a Figura 18.2, as bobinas I e II estão ligadas em série, de tal forma que o sentido das correntes nelas induzidas seja o mesmo. Neste caso, a *f.e.m.* aumenta duas vezes. Além disso, mais bobinas, bobinas III e IV, ligadas em serie entre si, dão o segundo circuito da corrente.

No primeiro par de bobinas, seja a fase inicial $\varphi_0 = 0$, isto é, nelas a *f.e.m.* varia pela lei

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \text{sen } \omega t, \quad (18.3)$$

no segundo par de bobinas a diferença de fases entre elas é $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ e

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \text{sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (18.4)$$

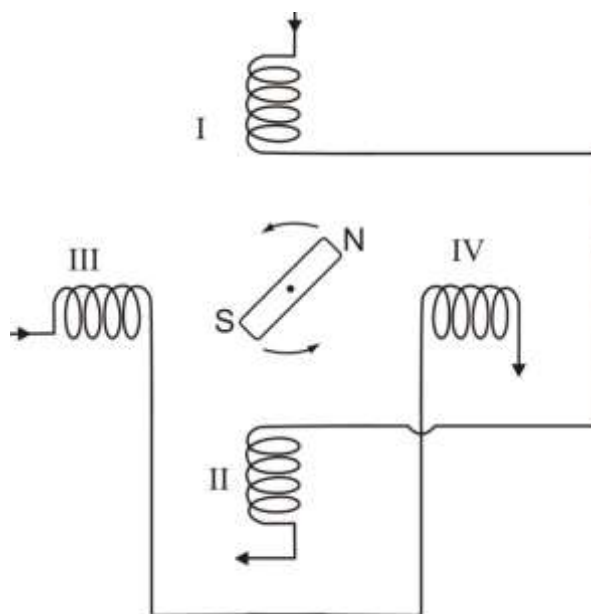


Figura 18.2

No esquema do gerador, Figura 18.2, temos dois circuitos de corrente. Vamos representá-los, esquematicamente, como é mostrado na Figura 18.3a. Esse esquema pode ser representado de outra forma tornando comum um dos fios (Figura 18.3b).

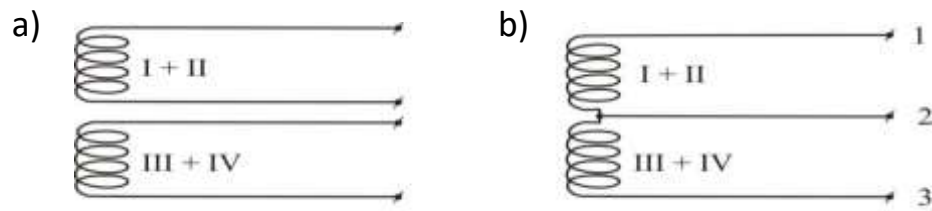


Figura 18.3

As correntes nos dois circuitos indicados têm diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$. O esquema da Figura 18.3b pode ser utilizado para a ligação do consumidor de corrente de três formas:

1. Ligar o consumidor entre as linhas 1 e 2,
2. Ligar o consumidor entre as linhas 2 e 3,
3. Ligar o consumidor entre as linhas 1 e 3.

Vamos encontrar a tensão entre as linhas 1 e 3, tendo em conta que a tensão entre as linhas (1 e 2) e (2 e 3) são dadas pelas fórmulas (18.3) e (18.4):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \varepsilon_0 \sin \omega t, \\ \varepsilon_{23} &= \varepsilon_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}\tag{18.5}$$

Vamos atribuir ao potencial do fio 2 o valor zero, então,

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{12} - \varepsilon_{23}.\tag{18.6}$$

ou

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_0 \sin \omega t - \varepsilon_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = 2\varepsilon_0 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)\tag{18.7}$$

$$= \varepsilon_0 \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).\tag{18.8}$$

Desta forma, o esquema analisado permite obter três correntes com diferentes fases. As amplitudes de duas correntes são iguais e a terceira amplitude é maior $\sqrt{2}$ vezes.

O esquema de gerador analisado representa o caso mais simples de gerador de corrente polifásico; gerador bifásico. O número de fases de um gerador, naturalmente, vai depender do número

de bobinas que possui. Ampla aplicação técnica recebeu a corrente gerada pelo gerador trifásico, a corrente trifásica. Analogamente ao esquema da Figura 18.3b, no caso de três bobinas, é possível tornar comum um fio (Figura 18.4).

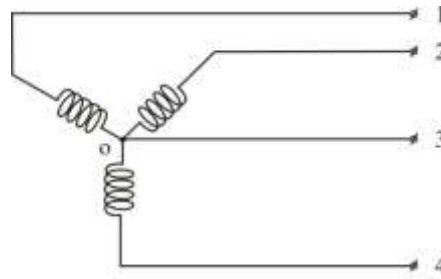


Figura 18.4

Podemos ligar o consumidor de corrente entre quaisquer dois fios, por exemplo, 1-2, 2-4, etc.

Conhecendo-se a diferença de fases (ela é igual a $\frac{2\pi}{3}$ entre bobinas vizinhas), pode-se calcular a amplitude e a fase de tensão entre dois condutores quaisquer. A associação de bobinas, mostrada na Figura 18.4, chama-se “ligação em estrela”. A corrente trifásica permite também outro tipo de ligação, chamada “ligação em triângulo” (Figura 18.5).

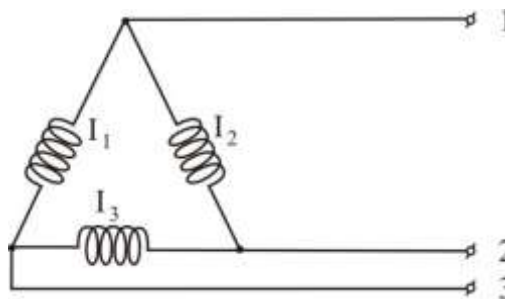


Figura 18.5

Aqui, o consumidor de corrente é ligado entre quaisquer das três saídas. A ligação em triângulo é possível porque a corrente em cada bobina difere-se pela fase de $\frac{2\pi}{3}$. Pode-se mostrar, com facilidade, que no circuito constituído de três bobinas que como se estivessem em curto-circuito uma com a outra, a corrente na realidade é igual à zero. Vamos representar as correntes nas bobinas por i_1, i_2, i_3 e vamos somá-las:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = i_0 \sin \omega t + i_0 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + i_0 \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right). \quad (18.9)$$

mas,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) &= \\ &= 2\operatorname{sen}(\omega t - \pi)\cos\frac{\pi}{3} = -\operatorname{sen}\omega t. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Consequentemente, $i = 0$, isto é, no caso da corrente trifásica, a ligação em triângulo, no final de contas, não significa curto-circuito, a corrente resultante no circuito de três bobinas é igual à zero.

Examinemos, agora, a passagem da corrente alternada através de circuitos constituídos por uma resistência, um capacitor e uma indutância, correspondentemente.

Seja o circuito de corrente alternada que consiste de uma indutância L (Figura 18.6), no qual se aplica uma diferença de potencial:

$$V = V_0 \cos \omega t. \quad (18.11)$$

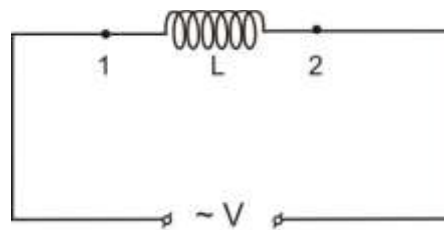


Figura 18.6

Pela lei de indução eletromagnética, nos extremos de uma bobina surge uma *f.e.m.*:

$$\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt}. \quad (18.12)$$

A diferença de potencial entre os pontos 1 e 2 é igual, por um lado, a V , e por outro, a $-\varepsilon_i$, isto é:

$$V = -\varepsilon_i, \quad V + \varepsilon_i = 0. \quad (18.13)$$

Consequentemente,

$$V_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0, \quad (18.14)$$

$$dI = \frac{V_0}{L} \cos(\omega t) dt, \quad I = \frac{V_0}{\omega L} \operatorname{sen} \omega t + \operatorname{const}. \quad (18.15)$$

Supondo que $t = 0$, a corrente é igual a zero determine que $\operatorname{const} = 0$. Consequentemente,

$$I = \frac{V_0}{\omega L} \text{sen} \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (18.16)$$

Desta maneira, a corrente no circuito de indução tem um atraso de fase de $\frac{\pi}{2}$ em relação à tensão.

Encontremos, agora, a corrente se o circuito é representado pelo capacitor C (Figura 18.7).

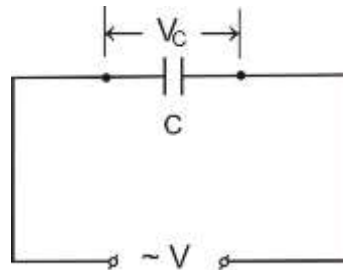


Figura 18.7

Define-se a tensão V_C no capacitor C pela relação:

$$V_C = \frac{q}{C}. \quad (18.17)$$

Da tensão $V = -V_C$, encontramos $V + V_C = 0$ ou

$$V_0 \cos \omega t + \frac{q}{C} = 0. \quad (18.18)$$

Vamos derivar essa igualdade:

$$-V_0 \omega \text{sen} \omega t + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0. \quad (18.19)$$

Tendo em conta que

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (18.20)$$

temos

$$V_0 \omega \text{sen} \omega t + \frac{1}{C} I = 0, \quad (18.21)$$

isto é,

$$I = -V_0 C \omega \text{sen} \omega t = \omega C V_0 \text{sen}(-\omega t)$$

ou

$$I = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (18.22)$$

Como mostra essa expressão, a corrente no circuito que contém o capacitor adianta da tensão pela fase de $\frac{\pi}{2}$.

Se num circuito de corrente alternada encontra-se uma resistência R , então, não se verifica deslocamento de fase entre a corrente e a tensão:

$$I R = V_0 \cos \omega t, \quad (18.23)$$

isto é,

$$I = \frac{V_0}{R} \cos \omega t. \quad (18.24)$$

Vamos encontrar a razão entre a amplitude de corrente e a amplitude de tensão para os três casos analisados. A amplitude da tensão é dada por V_0 .

Para o caso do circuito indutivo (ver fórmula (18.16)), a amplitude da corrente expressa-se pela fórmula:

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L}. \quad (16.25)$$

Consequentemente, a razão entre a amplitude da tensão e a amplitude da corrente, isto é; a resistência da bobina, é igual a ωL . Vamos chamá-la de “resistência indutiva” e simbolizada pela letra R_L :

$$R_L = \omega L. \quad (18.26)$$

No caso de um circuito constituído por um capacitor, encontramos

$$I_0 = V_0 \omega C, \quad (18.27)$$

de onde

$$\frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}. \quad (18.28)$$

Desta maneira, a resistência do capacitor pode ser encontrada pela fórmula:

$$R_C = \frac{1}{\omega C}.$$

É importante sublinhar que a natureza de R_L e R_C não tem ligação com a resistência ôhmica.

Se o circuito consiste de uma resistência, de um capacitor e de uma indutância, então, o cálculo da corrente com uma dada tensão alternada é possível de realizar, somente tendo em conta as relações de fase.

Entretanto, a maneira mais cômoda de fazer esse cálculo consiste no seguinte procedimento. Para diferentes ramos dos circuitos, as relações de fase entre a tensão e a corrente devem ser escritas com o auxílio dos números complexos e das suas representações geométricas, o que forma o conteúdo do chamado método simbólico na eletrotécnica.

CAPÍTULO 19

EQUAÇÕES DE MAXWELL

As leis do eletromagnetismo como um sistema de equações que descreve o vínculo entre as fontes do campo elétrico e do campo magnético, as suas intensidades e induções, na forma mais geral, foram formuladas pelo físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879). O primeiro trabalho de Maxwell, entre 1855 e 1856, foi intitulado “On Faraday’s lines of force”. Era uma tentativa de dar um tratamento matemático às concepções de Faraday. Nesse trabalho, ele fez uso de modelos mecânicos e das analogias físicas. A sua teoria madura foi publicada no artigo “A dynamical theory of the electromagnetic field” de 1865 e em “A Treatise on Electricity & Magnetism”, obra em dois volumes, publicada em 1873.

Já no Prefácio ao volume 1 do “Treatise”, Maxwell lembra que grandes progressos no campo da eletricidade e do magnetismo haviam sido realizados, principalmente, na Alemanha, por Gauss, Weber, Riemann, Carl Neumann, e outros, com base na teoria da ação à distância e a concepção de cargas elétricas como centros de forças centrais. Entretanto, Maxwell avisa ao leitor que sua concepção física dos fenômenos tinha como base a visão de Faraday dos fenômenos eletromagnéticos, rejeitando assim a ideia de ação à distância, em prol de uma teoria de campo de ação local. Maxwell chega a escrever que onde os matemáticos viram centros de forças de atração à distância, Faraday viu linhas de forças, representando ações locais em um meio que permeava o espaço entre as cargas elétricas e os magnetos. O grande mérito de Maxwell é o de conseguir expressar as concepções físicas de Michael Faraday em uma linguagem matemática robusta, que se concretizou nas famosas equações de Maxwell. Em seus trabalhos, Maxwell formulou os resultados experimentais obtidos por Faraday em termos dos operadores vetoriais div e rot , que já haviam sido empregados anteriormente por Stokes. Uma de suas observações foi que, da mesma forma que as cargas de polarização num dielétrico produzem um campo elétrico, a **corrente de polarização** deve produzir um campo magnético.

De fato, alguns anos antes dos importantes trabalhos teóricos de Maxwell, o estudo do eletromagnetismo já havia sido enriquecido pelas pesquisas de Faraday, que descobriu a lei da indução eletromagnética, a lei da corrente elétrica nos líquidos, o fenômeno de rotação da superfície de polarização das ondas e uma série de descobertas fundamentais na física.

Pode-se dizer que as equações de Maxwell representam a generalização dos dados experimentais, obtidos na primeira metade do século XIX, como resultado das pesquisas dos fenômenos da eletricidade e do magnetismo, realizados por muitos cientistas de diferentes países. Estas pesquisas foram generalizadas nas formas das leis de Coulomb, Ampère, Biot e Savart, a lei da indução de Faraday e do teorema de Gauss. Entretanto, o leitor desavisado pode ficar surpreso ao folhear os textos escritos por Maxwell, pois lá não irá encontrar as conhecidas equações de Maxwell, na forma em que elas aparecem nos livros didáticos. É que sua escrita canônica, na forma vetorial que hoje conhecemos, só veio ocorrer alguns anos mais tarde, graças às contribuições de Heinrich Hertz e Oliver Heaviside.

Em complementação aos conhecimentos existentes sobre as leis do eletromagnetismo, Maxwell analisando e generalizando os dados experimentais e reavaliando conhecimentos teóricos sobre o assunto, chegou à conclusão fundamental sobre a existência das chamadas **correntes de deslocamento**.

Vejamos esta questão com base nos fenômenos e nas leis do eletromagnetismo, já estudados por nós nos capítulos anteriores deste livro.

A circulação do vetor intensidade de campo magnético, em qualquer meio, em volta de um condutor percorrido pela corrente I é igual a esta corrente:

$$\oint_l H_l dl = I. \quad (19.1)$$

Esta equação é hoje conhecida como **lei de Ampère** (lei circuital de Ampère). Entretanto, Ampère nunca escreveu uma equação empregando conceito de campo magnético. Ele lidou apenas com conceitos de forças centrais.

Expressemos a corrente I por meio da densidade de corrente $\vec{j}$ na forma :

$$I = \int_s J_n ds, \quad (19.2)$$

de onde segue :

$$\oint H_l dl = \oint_s J_n ds. \quad (19.3)$$

Vamos introduzir a operação matemática chamada rotacional e simbolizada por “rot”, de acordo com a seguinte definição:

$$rot_n \vec{H} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\oint H_l dl}{\int dS}, \quad (19.4)$$

onde $\int dS$ - é a área limitada pelo contorno l ; a direção de $\nabla \times \vec{H}$ é perpendicular a esta área (que é mostrado pelo símbolo n).

Desta maneira, o rotacional representa o limite da razão entre a circulação pelo contorno l e a área limitada pelo contorno se o seu comprimento (e conseqüentemente, a área limitada por ele) tende para zero.

Para os fenômenos eletromagnéticos, este limite, de acordo com a fórmula (19.3), pode ser escrito assim:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\oint H_t dl}{\int_S dS} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\int_S j_n dS}{\int_S dS}. \quad (19.5)$$

Com $l \rightarrow 0$, através do elemento de superfície passa a corrente $dI = j_n dS$ que se pode considerar independente das coordenadas dentro do elemento dS , isto é, a corrente é definida pela sua densidade em dado ponto :

$$\int_S j_n dS = j_n \int_S dS. \quad (19.6)$$

Como a orientação da área dS é arbitrária e a normal a esta coincide com a direção do rotacional de (19.4), (19.5) e (19.6), obtemos:

$$rot_n \vec{H} = \vec{j}. \quad (19.7)$$

Esta equação, à primeira vista, representa uma generalização da fórmula para a circulação de $\vec{H}$, isto é, a generalização das leis de Ampère, Biot e Savart. Por outro lado, a expressão assim escrita cria a seguinte contradição: como $\vec{H}$ é um vetor de um campo rotacional (vetor solenoidal), então, a sua circulação, realmente, é diferente de zero, o que é expresso pela fórmula (19.7). Todavia, para qualquer campo rotacional, a divergência deve ser igual a zero, pois, para qualquer volume fechado, o número de linhas de indução divergentes é igual ao número de convergentes. Por isso, para qualquer campo rotacional $\vec{A}$, tem lugar a relação:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (19.8)$$

Aplicando esta relação à fórmula (19.7), obtemos:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (19.9)$$

Contudo, como sabemos, esta é uma conclusão falsa: a divergência da densidade de corrente não é igual a zero. A equação da continuidade, que reflete a lei de conservação da carga, diz que:

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (19.10)$$

Daqui, a conclusão inevitável de que a fórmula (19.7) relaciona-se com tais processos nos quais a corrente pode entrar em dado volume ou sair deste, somente em quantidades iguais. Na realidade, é possível o acúmulo ou diminuição de cargas no volume, o que expressa a equação da continuidade. Em outras palavras, a fórmula (19.7) foi obtida com a suposição de que a corrente representa, em si, somente um fluxo uniforme de partículas carregadas sem sua acumulação em elementos do circuito, por exemplo, nas placas de um capacitor. Para se ter em conta esta particularidade da corrente, vamos utilizar a relação por nós obtida do teorema de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (19.11)$$

Daqui, unindo esta fórmula com a fórmula (19.10), obtemos:

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} \quad (19.12)$$

ou

$$\nabla \cdot \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (19.13)$$

Consequentemente, o processo de acumulação de cargas (isto é, a variação da indução elétrica $\vec{D}$) é equivalente a uma corrente suplementar $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, o que Maxwell chamou de “corrente de deslocamento”. Desta maneira, a corrente $\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ é total, é uma corrente fechada. Para esta corrente, de fato, a divergência é igual a zero (a corrente que entra é igual à que sai em qualquer ramo do circuito).

Introduzindo essa corrente de deslocamento, Maxwell deu a seguinte forma à sua primeira equação:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (19.14)$$

Deve-se notar que Maxwell não utilizou o operador “rot”, ou seja, “curl”, em inglês, mas o expressou em coordenadas cartesianas correspondentemente às componentes X ; Y ; Z .

Depois de Maxwell, graças às contribuições de Herz e Heaviside, as equações que receberam seu nome, adquiriram uma forma mais compacta, a forma canônica, que apresentaremos neste capítulo e elas aparecem nos livros didáticos de todo o mundo.

Passamos, agora, para a segunda equação de Maxwell. Vamos generalizar a lei da indução eletromagnética de Faraday:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_B}{dt}, \quad (19.15)$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt} \int_s B_n dS. \quad (19.16)$$

O vetor $\vec{B}$ pode depender tanto do tempo como das coordenadas. Tendo em vista a dependência somente do tempo, vamos utilizar o símbolo para derivada parcial.

$$\varepsilon_i = -\int_s \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS. \quad (19.17)$$

A força eletromotriz, como a queda de potencial, em qualquer caso, é, por definição, igual à integral da componente tangencial da intensidade de campo elétrico multiplicada pelo elemento do contorno dl :

$$V = \int E_t dl. \quad (19.18)$$

Para o caso da *f.e.m.* de indução, a integral transforma-se em circulação:

$$\varepsilon_i = \oint_L E_t dl. \quad (19.19)$$

Consequentemente,

$$\oint_L E_t dl = -\int_s \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS. \quad (19.20)$$

ou

$$\text{rot}_n \vec{E} = \frac{\lim_{l \rightarrow 0} \oint_l E_t dl}{\int_S dS} = \frac{\lim_{l \rightarrow 0} \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS}{\int_S dS} = - \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n, \quad (19.21)$$

o que dá a segunda equação de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (19.22)$$

Em conjunto com as equações obtidas anteriormente para os vetores densidade do fluxo elétrico e densidade do fluxo magnético $\vec{D}$ e $\vec{B}$, respectivamente, as equações (19.14) e (19.22) compõem o sistema de equações de Maxwell, que reúne todas as leis da teoria clássica do eletromagnetismo. A solução das equações de Maxwell, para diferentes casos, é tema da radiotécnica e radiofísica.

Como veremos adiante, as equações de Maxwell levam à conclusão teórica sobre a existência de uma forma particular de um estado da matéria: as ondas eletromagnéticas, que se propagam no espaço com a velocidade da luz. Desta maneira, as equações de Maxwell tornaram-se o fundamento da teoria eletromagnética da luz.

Quinze anos depois da publicação do famoso *Treatise* de Maxwell sobre a eletricidade e o magnetismo, passados oito anos após a sua morte, as ondas eletromagnéticas foram observadas experimentalmente por Heinrich Hertz, em 1887. Sete anos após os resultados obtidos por Hertz, é atribuída ao russo Alexander Stepanovich Popov (1859-1906) a invenção do rádio. Há, contudo, uma controvérsia no tocante à questão de quem primeiro descobriu o princípio de transmissão e recepção das ondas eletromagnéticas descobertas por Hertz. O grande inventor sérvio Nikola Tesla (1856-1943) e o inglês Oliver Lodge (1851-1940) podem ser considerados precursores dessa façanha. Em geral, a invenção do rádio é atribuída a Guglielmo Marconi (1874-1937). Entretanto, alguns registros históricos parecem indicar que Popov pode ser considerado o inventor do rádio, tendo em vista que, em 07 de maio de 1895, ele fez uma apresentação à Sociedade Russa de Físico-Química de São Petersburgo de seu dispositivo para transmissão e detecção das ondas de rádio. Marconi foi bem sucedido em desenvolver os princípios dessa invenção, possivelmente, de modo independente, fazendo transmissões de ondas eletromagnéticas a grandes distâncias, quase simultaneamente aos trabalhos de Popov. Em 02 de julho de 1897, Marconi recebeu patente por sua invenção e, logo, em seguida, em 20 de julho do mesmo ano, em Londres, ele fundou a sociedade por ações, denominada *Wireless Telegraph and Signal Company Ltda.* Em 1909, em reconhecimento à sua contribuição para a invenção do telégrafo sem fio e do rádio, Marconi recebeu o Prêmio Nobel de Física.

Para concluir, uma vez mais, vamos escrever na forma diferencial o sistema de equações de Maxwell, de acordo com o Sistema Internacional de Unidades (sistema SI):

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
 \nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{19.23}$$

Na solução desta equação tem-se em conta que entre as grandezas que entram nelas existem as chamadas relações materiais:

$$\begin{aligned}
 \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \\
 \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}, \\
 \vec{j} &= \sigma \vec{E}.
 \end{aligned}$$

O conjunto destas sete equações constitui o fundamento da eletrodinâmica dos meios materiais.

Estas equações são escritas na forma integral como segue:

$$\begin{aligned}
 \oint_L H_t dl &= \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\
 \oint_L E_t dl &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS \\
 \oint D_n dS &= \int_V \rho dV \\
 \oint B_n dS &= 0
 \end{aligned}
 \tag{19.24}$$

Diante das equações de Maxwell, o físico austríaco Ludwig Boltzmann (1844-1906) perguntou, admirado com sua simplicidade, citando as palavras do *Fausto*, de Goethe: “Foi um deus quem escreveu estes símbolos?”

No sistema gaussiano, as equações de Maxwell (19.23) e (19.24) são ligeiramente alteradas. Na primeira equação, $\vec{j}$ passa a ser $\frac{4\pi}{c} \vec{j}$, enquanto $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ passa a ser $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; na segunda equação, perante $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ também aparece o fator $\frac{1}{c}$, e, finalmente, na penúltima equação, ρ passa a ser $4\pi\rho$.

O físico Marcolm Longair em obra citada abaixo, escreve que Maxwell reconheceu a importante distinção entre os campos $\vec{B}$ e $\vec{H}$, associando $\vec{B}$ com os fluxos magnéticos, e o

denominando de **indução magnética**. Ele associou $\vec{H}$ com as forças, chamando-o de intensidade magnética. O campo $\vec{H}$ está associado com a força exercida sobre uma unidade de polo magnético.

Entretanto, em muitos livros didáticos de caráter mais teórico, as equações de Maxwell são escritas sem a distinção entre os pares de vetores $\vec{E}$, $\vec{D}$ e $\vec{B}$, $\vec{H}$, tratando as quatro equações em termos dos vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Por exemplo, é em termos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ que estão escritas as equações de Maxwell no livro intitulado Mecânica Analítica de Nivaldo Lemos, o que é correto em se tratando do vácuo.

CAPÍTULO 20

OSCILAÇÕES LIVRES NÃO-AMORTECIDAS E AMORTECIDAS NUM CIRCUITO. FATOR DE QUALIDADE DE UM CIRCUITO ELÉTRICO OSCILATÓRIO

Vamos construir um circuito com uma indutância, uma capacitância e admitir que a resistência ativa do circuito seja muito pequena (Figura 20.1).

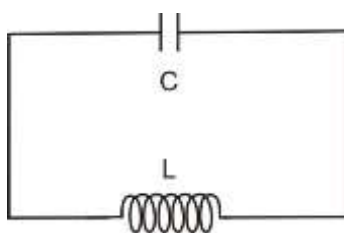


Figura 20.1

Se for considerado que $R = 0$, então, no circuito podem existir oscilações de correntes não amortecidas. Imaginemos que nas placas do capacitor C surgiram cargas (por exemplo, nós o carregamos uma fonte externa). Como as placas do capacitor estão ligadas através da bobina L , nela passa uma corrente, isto é, as cargas armazenadas nas placas circulam pelos fios da bobina. Porém, o surgimento de corrente na bobina dá origem a um campo magnético de tal sentido que irá impedir o aumento da corrente (regra de Lenz). Consequentemente, o campo magnético crescente irá causar resistência ao fluxo de cargas das placas do capacitor. Quando nas placas do capacitor não houver mais cargas, o campo magnético da bobina começa a diminuir-se e a dar origem a uma corrente de sentido tal que tinha a corrente do capacitor que se descarregava. Dessa modo, o circuito será atravessado por uma corrente oriunda da variação do campo magnético, isto é, cargas vão circular e elas serão armazenadas nas placas do capacitor. Quando o campo magnético for extinto, o capacitor estará novamente carregado, mas agora nas suas placas vão aparecer cargas de sinais contrários, relativamente ao estado inicial: o capacitor estará recarregado. Novamente, o capacitor começa a se descarregar através da bobina e o mesmo processo de recarga se repete.

Consequentemente, no circuito LC surgem oscilações de corrente. Pode-se notar que estas oscilações elétricas possuem analogia com as oscilações mecânicas. Essas oscilações já devem ter sido

tratadas no curso de mecânica, por exemplo, lá foram estudadas as oscilações de uma massa pendente numa mola (Figura 20.2), ou as oscilações de pêndulos, os mais variados, desde pêndulo simples até pêndulos compostos.

Na posição de equilíbrio, a coordenada é $x = 0$. Desloquemos a massa m da posição da equilíbrio supondo que a força elástica surgida obedeça a lei de Hooke, isto é, a variação do comprimento da mola é diretamente proporcional à força. Devido à força elástica, com sentido contrário ao deslocamento x da mola, a massa m , ao ser abandonada, inicia um processo oscilatório em torno da posição de equilíbrio. Na posição de equilíbrio, a força de atração gravitacional da massa m é equilibrada pela força elástica da mola.

Assim, deslocando o corpo m da posição de equilíbrio, e soltando-o, obtemos uma força não compensada proporcional ao alongamento da mola e que atua sobre o corpo de massa m . Vamos escrever a segunda lei de Newton, para esse corpo:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x, \quad (2.1)$$

onde k é a constante elástica da mola e o produto $-kx$ é a força elástica que atua sobre a massa m (lei de Hooke).

A equação do movimento oscilatório,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0, \quad (20.2)$$

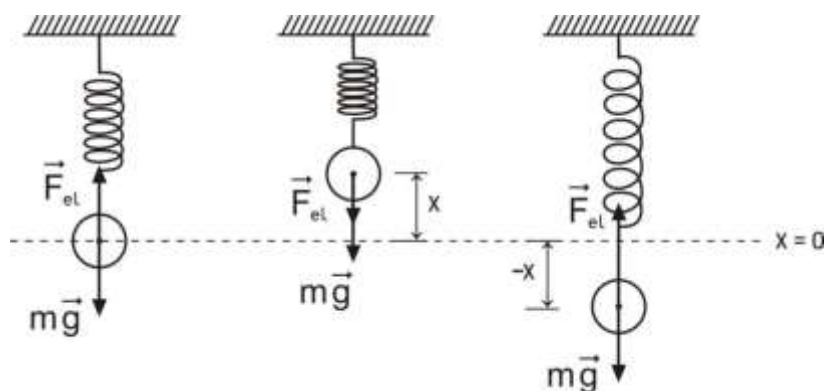


Figura 20.2

como se sabe da mecânica e como se vê da própria equação (20.2), tem solução na forma de uma função trigonométrica cosseno ou seno. Realmente, a segunda derivada de qualquer dessas funções é a própria função com o sinal oposto, multiplicada por uma constante, o que satisfaz à equação (20.2). Vamos escrever essa solução na forma

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (20.3)$$

e encontremos as grandezas x_0, ω_0, φ_0 a partir das condições iniciais e da própria equação (20.3). Se na posição de equilíbrio $t = 0$ e o alongamento x é igual à zero, então,

$$0 = x_0 \cos \varphi_0, \quad (20.4)$$

isto é, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, então,

$$x = x_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -x_0 \sin \omega_0 t. \quad (20.5)$$

Quando $\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$, obtemos $\omega_0 t = 1$ e o desvio da massa m da posição de equilíbrio atinge o valor máximo x_0 , que chamamos de amplitude de oscilação.

Vamos substituir a solução (20.5) na equação (20.2) e encontrar a frequência circular da oscilação:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_0 \sin \omega_0 t) + \frac{k}{m} x_0 \sin \omega_0 t = 0, \quad (20.6)$$

$$-x_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t + \frac{k}{m} x_0 \sin \omega_0 t = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (20.7)$$

Vamos obter a equação das oscilações elétricas aplicando a Segunda lei de Kirchhoff.

$$\sum \mathcal{E}_i = 0, . \quad (20.8)$$

ou

$$\mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C = 0 ,$$

isto é

$$-L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad (20.9)$$

Notando-se que $I = -\frac{dq}{dt}$, temos

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0, \quad (20.10)$$

ou

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (20.11)$$

Comparando com a equação (20.2), vemos que elas são análogas, conseqüentemente, o valor da carga nas placas do capacitor varia pela lei

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (20.12)$$

onde a frequência circular ω_0 define-se pela fórmula (20.7):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (20.13)$$

Essa frequência chama-se frequência própria do circuito. Conhecendo a frequência circular, determinamos o período de oscilação:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (20.14)$$

A fórmula obtida é chamada formula de Thomson.

Qualquer circuito real possui resistência R e, por isso é necessário examinar o processo de oscilações elétricas para o caso quando num circuito fechado, juntamente, com a queda de tensão no capacitor e na indutância, existe ainda queda de tensão na resistência:

$$-L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = RI. \quad (20.15)$$

Fazendo a substituição

$$I = -\frac{dq}{dt},$$

temos:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (20.16)$$

A solução de uma equação desse tipo, em geral, é obtida nos cursos de mecânica, ou seja, a equação

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (20.17)$$

(com a condição $\alpha^2 \ll \omega_0^2$) que tem como solução a seguinte expressão

$$x = x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (20.18)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (20.19)$$

Consequentemente, a solução da equação (20.16), para as oscilações amortecidas terá a forma (com a condição $\frac{R^2}{4L^2} \ll \frac{1}{LC}$):

$$q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (20.20)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

isto é, a frequência das oscilações amortecidas é menor que a frequência própria (frequência natural) do circuito, representada por ω_0 .

Notemos que, com $R = 0$, essas expressões transformam-se nas expressões, obtidas acima, para as oscilações não-amortecidas.

O coeficiente $\alpha = \frac{R}{2L}$ chama-se “coeficiente de amortecimento”. O seu significado consiste em que no decorrer do tempo $\tau = \frac{2L}{R}$, tempo de relaxação, que é uma grandezas inversa do coeficiente de amortecimento: $\tau = \frac{1}{\alpha}$, a amplitude das oscilações diminui-se de $e = 2,72$ vezes.

A razão entre duas amplitudes que correspondem aos instantes de tempo que diferem de um período T chama-se decremento de amortecimento e simboliza-se pela letra θ :

$$\theta = \frac{q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}}{q_0 e^{-\frac{R}{2L}(t+T)}} = e^{\frac{R}{2L}T}. \quad (20.21)$$

O logaritmo natural dessa razão chama-se logaritmo de amortecimento:

$$\lambda = \ln \theta = \frac{R}{2L} T = \alpha T . \quad (20.22)$$

Obtemos o significado físico de λ , da sua comparação com α :

$$\lambda = \alpha T = \frac{T}{\tau} , \quad (20.23)$$

mas, $\frac{\tau}{T}$ é igual ao número de oscilações no intervalo τ , isto é, naquele tempo no decorrer do qual a amplitude diminui-se de e vezes. Simbolizando esse número por N , temos:

$$\lambda = \frac{1}{N} . \quad (20.24)$$

Uma das grandezas mais utilizadas, que caracteriza a taxa de amortecimento das oscilações num circuito, é o fator de qualidade do circuito, também chamado de fator Q , definido como uma grandeza inversamente proporcional ao decremento logarítmico de amortecimento:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N . \quad (20.25)$$

Consequentemente, define-se o fator de qualidade pelo número de oscilações realizadas pela carga (ou corrente) no circuito durante o intervalo de tempo em que a amplitude da carga (ou corrente) diminui-se de e vezes. Se o fator de qualidade do circuito é grande, o amortecimento é pequeno, o número de oscilações sem diminuição notável da amplitude é grande. A grandeza Q pode ser expressa, também, através do coeficiente de amortecimento, substituindo em (20.25) em vez de λ o seu valor de acordo com a fórmula (20.23):

$$\lambda = \alpha T ,$$

$$Q = \frac{\pi}{\alpha T} = \frac{2\pi}{2\alpha T} = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{2\pi}{T} \right) = \frac{\omega}{2\alpha} . \quad (20.26)$$

Quando o amortecimento é pequeno, o que frequentemente se verifica na radiotécnica, pode-se obter:

$$\omega \approx \frac{1}{\sqrt{L C}} , \quad (20.27)$$

então

$$Q \approx \frac{1}{2\alpha\sqrt{LC}} = \frac{2L}{2R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (20.28)$$

Se a condição $\frac{R^2}{4L^2} \ll \frac{1}{LC}$ não se cumpre, a equação (20.16) não possui solução periódica: não há movimento oscilatório e ocorre uma diminuição da carga exponencialmente ou descarga aperiódica. A passagem do movimento oscilatório para uma descarga aperiódica verifica-se quando a resistência do circuito $R = R_{crítica}$, isto é, tendo em conta a condição

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

encontramos:

$$R = R_{crítica} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (20.29)$$

CAPÍTULO 21

OSCILAÇÕES FORÇADAS

Se num circuito oscilatório for ligada uma fonte de *f.e.m.* alternada $V_0 \cos \omega t$, então, nele surgem oscilações forçadas. Vamos encontrar a equação das oscilações forçadas acrescentando à equação das oscilações amortecidas livres (fórmula (20.15)) o termo que descreve a tensão alternada aplicada:

$$-L \frac{dI}{dt} - RI + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t. \quad (21.1)$$

Passando à equação para a carga, obtemos

$$\ddot{q} + 2\alpha \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{V_0}{L} \cos \omega t, \quad (21.2)$$

onde

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

A equação (21.2) coincide com a equação das oscilações mecânicas forçadas, estudadas nos cursos de mecânica. Esta é uma equação diferencial não homogênea de segunda ordem. A sua solução é a soma da solução geral da equação homogênea (isto é, a equação (21.2) sem a parte direita) e a solução particular da equação não homogênea.

Vamos procurar a solução parcial da equação (21.2) na forma:

$$q = q_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (21.3)$$

A substituição de (21.3) na equação (21.2) dá:

$$-q_0 \omega^2 \cos(\omega t + \theta) - 2\alpha q_0 \omega \sin(\omega t + \theta) + \omega_0^2 q_0 \cos(\omega t + \theta) = \frac{V_0}{L} \cos \omega t, \quad (21.4)$$

ou

$$-q_0 \omega^2 (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) - 2\alpha q_0 \omega (\cos \omega t \sin \theta + \sin \omega t \cos \theta) + \omega_0^2 q_0 (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) = \frac{V_0}{L} \cos \omega t,$$

ou

$$\begin{aligned} & -[q_0(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \theta - 2\alpha q_0 \omega \sin \theta] \cos \omega t - \\ & -[q_0(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \theta + 2\alpha q_0 \omega \cos \theta] \sin \omega t = \frac{V_0}{L} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (21.5)$$

A fim de que essas equações se cumpram para qualquer t , é necessário que os coeficientes junto de $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, na parte direita e na parte esquerda, sejam respectivamente iguais, isto é:

$$\begin{aligned} q_0(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \theta - 2\alpha q_0 \omega \sin \theta &= \frac{V_0}{L} \\ q_0(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \theta + 2\alpha q_0 \omega \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (21.6)$$

Elevando essas equações ao quadrado e somando-as, obtemos:

$$q_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 q_0^2 \omega^2 = \frac{V_0^2}{L^2} \quad (21.7)$$

de onde, obtemos:

$$q_0 = \frac{\frac{V_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}. \quad (21.8)$$

Da segunda equação do sistema (21.6), obtemos:

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{2\alpha \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (21.9)$$

Substituindo α e ω_0 pelos seus valores $\left(\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \right)$ encontramos:

$$q_0 = \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (21.10)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}. \quad (21.11)$$

A solução geral da equação homogênea, de acordo com a fórmula (20.20), contém o fator $e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t}$, ou seja, indicando que ela representa oscilações amortecidas. Para grandes valores de t , quando o processo oscilatório torna-se estacionário, a solução geral da equação uniforme fornece um termo muito pequeno que pode ser desprezado. Consequentemente, a solução particular (21.3) descreve um processo oscilatório estacionário que surge sob a ação de um agente externo. Essas oscilações são denominadas oscilações forçadas.

Vamos determinar a corrente estabelecida no circuito a partir das expressões (21.3) e (21.10):

$$I = -\frac{dq}{dt} = \omega q_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta), \quad (21.12)$$

ou

$$I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta) = I_0 \cos\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad (21.13)$$

onde

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad I_0 = \omega q_0.$$

Encontramos a frequência de ressonância para a carga (ou tensão no capacitor, pois $V_C = \frac{q}{C}$), encontramos da fórmula (21.10) pelo mínimo da função que se encontra sob a raiz no denominador. Determinamos o mínimo dessa função, igualando a zero a sua primeira derivada em relação a ω :

$$\frac{d}{d\omega} \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]_{res.} = 0, \quad (21.14)$$

ou

$$\frac{d}{d\omega} \left[\omega^2 R^2 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C} \right)^2 \right]_{res.} = 0.$$

Daí resulta:

$$2 \omega_r R^2 + 2 \left(\omega_r^2 L - \frac{1}{C} \right) 2 \omega_r L = 0. \quad (21.15)$$

$$\left[R^2 + 2 L \left(\omega_r^2 L - \frac{1}{C} \right) \right] \omega_r = 0. \quad (21.16)$$

A solução $\omega_r = 0$ corresponde à corrente contínua. As outras soluções diferem-se apenas pelo sinal + e -.

$$\omega_r = \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (21.17)$$

Como a frequência não pode ser negativa, descartamos o sinal (-) e obtemos:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (21.18)$$

Comparando com a frequência própria do circuito ω_0 (isto é, a frequência com $R = 0$, fórmula (20.13)), obtemos:

$$\omega_r < \omega_0. \quad (21.19)$$

De (21.19) resulta que, para uma excitação de ressonância do circuito por uma tensão externa alternada, a sua frequência deve ser um pouco menor que a frequência das oscilações livres.

As curvas de ressonância construídas de acordo com as fórmulas obtidas para a tensão no capacitor e para a corrente no circuito estão representadas na Figura 21.1.

As curvas de ressonância para a corrente são diferentes pelo fato de que nelas, para qualquer R , de acordo com a fórmula (21.13), o máximo tem lugar com $\omega = \omega_0$.

Examinemos o caso de amortecimentos fracos no circuito, isto é; no caso de grande fator de qualidade Q do circuito. Neste caso

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}, \quad (21.20)$$

então, a frequência de ressonância para a tensão será igual à frequência própria do circuito:

$$\omega_r \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (21.21)$$

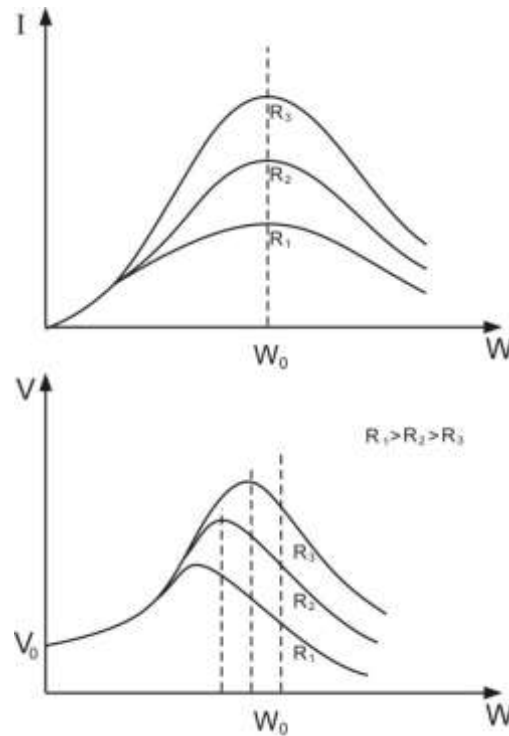


Figura 21.1

Da fórmula (21.10), determinamos a razão entre a amplitude de tensão no capacitor C e a amplitude da tensão externa na ressonância:

$$V_0 = \frac{q_0}{C} = \frac{V_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (21.22)$$

Na ressonância

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \text{ isto é;}$$

$$\frac{V_c}{V_0} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} C \sqrt{R^2}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \quad (21.23)$$

De acordo com a fórmula (20.28), esta grandeza é igual ao fator de qualidade Q do circuito, isto é, na ressonância, no caso de pequeno amortecimento, o coeficiente de qualidade Q é igual à razão da amplitude da tensão no capacitor pela amplitude da tensão externa.

Para valores grandes do fator de qualidade Q , é fácil a obtenção de uma relação aproximada que faz o vínculo entre a largura da curva de ressonância da corrente e o fator de qualidade. Por largura da curva ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$), entendemos a diferença entre as frequências para as quais o valor do quadrado da corrente é igual a 0,5 do quadrado do valor máximo.

Para as primeiras potências da corrente, as suas razões, nesse caso, devem ser iguais a 0,7 (Figura 21.2).

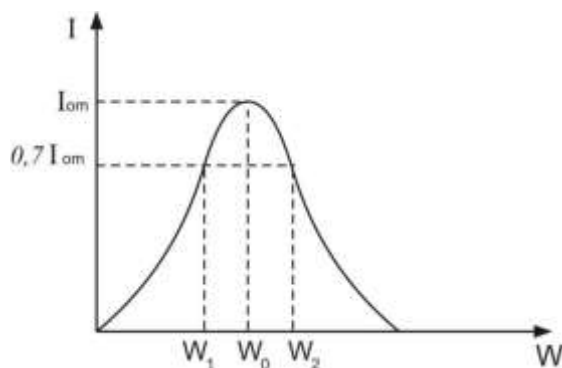


Figura 21.2

Da fórmula (21.13) resulta que a expressão para a amplitude da corrente

$$I^2 = 0,5 I_{0 \text{ máx}}^2, \quad (21.24)$$

cumpre-se sob a condição

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = 2 R^2, \quad (21.25)$$

pois, neste caso,

$$I_0^2 = \frac{V_0^2}{2 R^2} = \frac{1}{2} I_{0 \text{ máx.}}^2. \quad (21.26)$$

Da expressão (21.25) resulta

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = R^2 \quad (21.27)$$

ou

$$\left(\omega - \frac{1}{\omega LC} \right)^2 \frac{R^2}{L^2} \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) = \frac{R^2}{L^2}. \quad (21.28)$$

Expressando a parte direita de (21.28) através do coeficiente de qualidade da expressão (21.23)

$$Q^2 = \frac{L}{R^2 C} \quad \text{ou} \quad \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{Q^2 LC}, \quad (21.29)$$

obtemos :

$$\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{Q^2 LC} = \frac{\omega_0^2}{Q^2}, \quad (21.30)$$

ou

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}, \quad (21.31)$$

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}, \quad (21.32)$$

$$\frac{\omega^4}{\omega_0^4} - 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1 = \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad (21.33)$$

$$\frac{\omega^4}{\omega_0^4} - \left(2 + \frac{1}{Q^2} \right) \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1 = 0. \quad (21.34)$$

Resolvendo esta equação, encontramos:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left(1 + \frac{1}{2Q^2} \right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2Q^2} \right)^2 - 1} = \left(1 + \frac{1}{2Q^2} \right) \pm \frac{1}{Q} \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}. \quad (21.35)$$

Para valores grandes de Q , pode-se considerar que

$$1 + \frac{1}{4Q^2} \approx 1; \quad 1 + \frac{1}{2Q^2} \approx 1, \quad (21.36)$$

então,

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 \pm \frac{1}{Q} \approx \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right)^2, \quad (21.37)$$

ou

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}, \quad (21.38)$$

de onde, obtemos os valores das frequências ω_1 e ω_2 , cuja diferença fornece a largura da curva de ressonância:

$$\omega_1 = \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \omega_0, \quad (21.39)$$

$$\omega_2 = \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \omega_0$$

de onde, obtemos:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (21.40)$$

Consequentemente, com grandes valores de Q , a largura relativa da curva de ressonância é igual à grandeza inversa do fator de qualidade, isto é, quanto maior for Q , mais aguda será a curva de ressonância.

CAPÍTULO 22

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS E SUA ENERGIA

Para a obtenção de oscilações eletromagnéticas não-amortecidas num circuito, é preciso continuamente compensar a energia gasta devido às perdas que levam ao amortecimento. Um dos tipos dessas perdas é o aquecimento dos fios do circuito que sempre possuem certa resistência ativa R (calor de Joule).

Para os fenômenos eletromagnéticos, além disso, são características as perdas na radiação de energia no espaço circundante. Foi estabelecido, experimentalmente, que a velocidade de propagação das perturbações eletromagnéticas tem limite e isto leva à conclusão da inevitabilidade da radiação de energia eletromagnética no espaço da região adjacente.

De fato, a transformação do campo elétrico em magnético num circuito oscilatório, especialmente quando as placas do capacitor estiverem significativamente separadas (Figura 22.1), está relacionada com a variação periódica do campo elétrico no espaço entre as placas do capacitor.

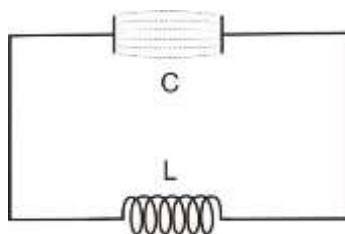


Figura 22.1

De acordo com as equações de Maxwell, um campo elétrico variável provoca o surgimento de um campo magnético. Consequentemente, no espaço circundante surgem campos elétricos e magnéticos que variam periodicamente. A velocidade finita de propagação do campo elétrico e do campo magnético tem como consequência inevitável a distribuição periódica no espaço de ondas eletromagnéticas progressivas. Para a irradiação de ondas eletromagnéticas no espaço, o circuito oscilatório é aberto, isto é; as placas do capacitor ficam separadas por uma distância como, por exemplo, é mostrado na Figura 22.2.

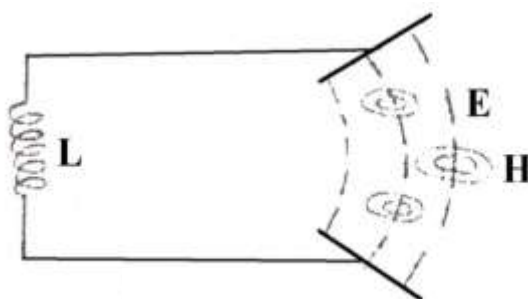


Figura 22.2

Para a transmissão de ondas eletromagnéticas no espaço circundante, o circuito oscilatório é transformado num sistema de radiação, para isso, a superfície da Terra serve como uma das placas do capacitor e como a segunda, uma antena (Figura 22.3a).

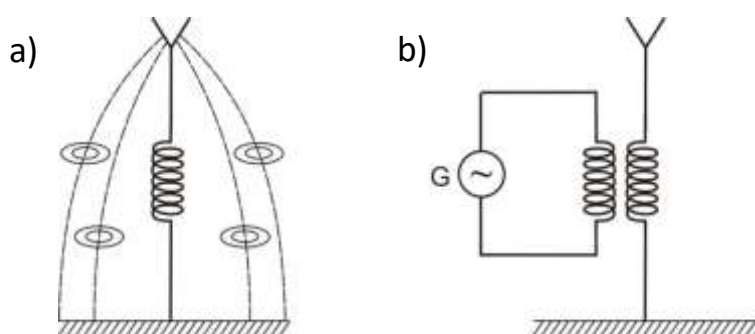


Figura 22.3

A Figura 22.1, a Figura 22.2 e a Figura 22.3 mostram um circuito LC sem resistência ativa R. Se não houvesse perdas na radiação, as oscilações eletromagnéticas nele seriam não-amortecidas. Como consequência de perdas, as oscilações amortecem-se rapidamente. Para mantê-las inalteradas, é preciso ter presente geradores de oscilações eletromagnéticas não-amortecidas. Por meio de um destes geradores, ligado indutivamente com a bobina do circuito aberto pode-se compensar a energia do circuito gasta na radiação (Figura 22.3b).

Neste caso, as ondas eletromagnéticas propagam-se, quando o campo elétrico tem apenas uma componente, por exemplo, ao longo do eixo x e as correntes e cargas inexistem. Então, as equações de Maxwell que ligam $\vec{E}$ e $\vec{H}$ num meio (ver fórmulas (19.23)):

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \epsilon \epsilon_0 \vec{E} &= \vec{D}, \\ \mu_0 \mu \vec{H} &= \vec{B}.\end{aligned}\tag{22.1}$$

tomam a seguinte forma :

$$(\nabla \times \vec{H})_x = \varepsilon_o \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t},$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_o \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \text{ para } \vec{E} = \vec{E}_x. \quad (22.2)$$

Derivando pelo tempo a primeira dessas equações e substituindo nela (depois da derivação) a grandeza $\frac{\partial H}{\partial t}$, da segunda equação, obtemos:

$$\left(\nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)_x = \varepsilon \varepsilon_o \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},$$

$$-\frac{1}{\mu_o \mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{E})_x = \varepsilon \varepsilon_o \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E})_x = -\varepsilon_o \mu_o \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (22.3)$$

Agora, é preciso encontrar o valor da componente x do rotacional duplo, indicado na última expressão, sendo $E = E_x$. Para isto é necessário conhecer a operação rotacional de um vetor, no sistema de coordenadas cartesianas.

Nos cursos de cálculo diferencial e integral, aprendemos que o rotacional de um vetor $\mathbf{A}$, expresso em coordenadas cartesianas, é dado na forma do determinante

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

isto é;

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{x}_o + \frac{\partial A_x}{\partial z} \vec{y}_o + \frac{\partial A_y}{\partial x} \vec{z}_o - \frac{\partial A_x}{\partial y} \vec{z}_o - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{y}_o - \frac{\partial A_y}{\partial z} \vec{x}_o, \quad (22.4)$$

ou

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{x}_o + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{y}_o + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{z}_o. \quad (22.5)$$

No nosso caso, é preciso realizar esta operação sobre o vetor $\vec{E}$, que possui somente a componente E_x . Consequentemente,

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{y}_o + \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{z}_o. \quad (22.6)$$

Agora, de acordo com a equação (22.3), vamos encontrar a componente x do rotacional dessa grandeza:

$$\left[\nabla \times \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{y}_o - \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{z}_o \right) \right]_x = \varepsilon_o \mu_o \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (22.7)$$

Da relação (22.5), encontramos que a componente x do rotacional de qualquer vetor $\vec{A}$ é igual à expressão seguinte:

$$\nabla \times [\vec{A}]_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Neste caso, a expressão entre colchetes na relação (22.7) desempenha o papel de vetor $\vec{A}$, conseqüentemente,

$$\left[\nabla \times \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{y}_o - \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{z}_o \right) \right]_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right). \quad (22.8)$$

Das expressões (22.7) e (22.8), encontramos:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_o \mu_o \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (22.9)$$

Nos cursos de mecânica, no tópico envolvendo o movimento ondulatório, obtemos a equação do tipo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (22.10)$$

que é chamada “equação ondulatória”, onde v significa a velocidade de propagação da onda.

A equação (22.9) obtida para o vetor intensidade do campo elétrico $\vec{E}$ (que tem, por condição, somente a componente E_x) é também uma equação de onda e a velocidade de propagação da mesma é determinada pela permissividade dielétrica, permeabilidade magnética do meio e a do vácuo:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} \quad (22.11)$$

Para o vácuo,

$$\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$$

logo, substituindo os seus valores em (22.11), obtemos:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{36\pi}\right) \cdot 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = \frac{6}{2 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

isto é; no vácuo, a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas é igual à velocidade da luz.

Afirmamos que as ondas analisadas são eletromagnéticas. A nossa afirmação é correta, pois das equações de Maxwell segue que o vetor $\vec{H}$ satisfaz à mesma equação de onda que o vetor $\vec{E}$. Para demonstrar isso, é suficiente realizar cálculos análogos, excluindo o vetor $\vec{E}$ da primeira e da segunda equação em (22.2). Além disso, as equações de Maxwell mostram que qualquer variação da indução elétrica, representada pelo campo $\vec{D}$, dá origem ao campo magnético $\vec{H}$. Consequentemente, se uma onda elétrica propaga-se no espaço, então, inevitavelmente, como consequência disso, haverá uma onda magnética. Os dois campos mostram assim serem inseparáveis, quando considerados sob um aspecto mais profundo.

Vamos analisar um dos exemplos mais simples, ou seja, uma onda eletromagnética plana, cuja componente depende somente de uma coordenada. No nosso caso, isto significa que o vetor $\vec{E}$, tendo somente a componente x , não depende das coordenadas x e y , isto é, no plano xy , em qualquer dos seus pontos, o vetor $\vec{E}$ possui um mesmo módulo, direção e sentido. Isto, naturalmente, é uma idealização. Na realidade, tal onda não pode existir, pois, a sua existência significaria o movimento de uma frente de onda infinita com valor finito da intensidade do campo $\vec{E}$ em cada ponto, isto é, a existência de uma energia de onda infinitamente grande. Contudo, a onda plana é uma solução da equação de Maxwell. Isto não é um sinal de erro ou limitação das equações; elas são lineares, consequentemente, a soma das soluções também é solução delas e a soma de ondas planas pode representar grandes variedades de formas de processos eletromagnéticos realmente existentes. Por isso, as soluções são procuradas na forma de ondas planas e depois as suas superposições são compostas partindo das condições do problema.

Se tomarmos a proposição sobre a existência da solução na forma de uma onda plana, então,

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \quad (22.12)$$

isto é, E_x não depende da coordenada y .

A equação (22.9) toma a forma:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (22.13)$$

Agora, vamos encontrar o vetor $\vec{H}$ para esta onda:

$$(\nabla \times \vec{H})_x = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t}. \quad (22.14)$$

ou

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (22.15)$$

Como o campo $\vec{E}$ não depende da coordenada y , então, o campo $\vec{H}$, criado pelo campo $\vec{E}$, também não depende da coordenada y , isto é,

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (22.16)$$

e a equação (22.15) toma a forma:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (22.17)$$

Vamos derivar esta equação por z :

$$-\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right). \quad (22.18)$$

Da equação de Maxwell, temos

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (22.19)$$

Encontramos

$$(\nabla \times \vec{E})_x = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t}, \quad (22.20)$$

ou

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}. \quad (22.21)$$

Unindo (22.20) com (22.18), obtemos:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}, \quad (22.22)$$

isto é, a equação de onda para H_y .

Consequentemente, numa onda plana, os vetores $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são perpendiculares entre si (no nosso caso, $E = E_x$ e $H = H_y$).

As funções senoidais servem como solução das equações do tipo (22.13) ou (22.21)

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad (22.23)$$

$$H_y = H_0 \cos(\omega t - kz).$$

Esclarece-se o sentido físico da grandeza k , chamada número de onda, a partir da definição de velocidade de fase. A condição de constância de fase é

$$\omega t - kz = \text{const.}, \quad (22.24)$$

significa que a diferencial da fase é igual a zero,

$$\begin{aligned} d(\omega t - kz) &= 0, \\ \omega dt - k dz &= 0, \end{aligned} \quad (22.25)$$

isto é,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}, \quad (22.26)$$

mas, $\frac{dz}{dt}$ é a velocidade de fase v , consequentemente,

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad k = \frac{\omega}{v}. \quad (22.27)$$

Notando-se que $\omega = 2\pi \nu$, onde ν é o número de oscilações por segundo, e $\nu = v / \lambda$, onde λ é o comprimento de onda, encontramos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (22.28)$$

A substituição de solução da (22.22) nas equações (22.17) e (22.20) conduz às seguintes relações:

$$\begin{aligned} kH_0 &= \varepsilon \varepsilon_0 \omega E_0, \\ kH_0 &= \mu \mu_0 \omega H_0, \end{aligned} \quad (22.29)$$

de onde segue que $k^2 = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \omega^2$, que corresponde aos resultados obtidos em (22.26).

Tomando as relações obtidas em (22.28) e multiplicando-as, encontramos:

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 = \mu \mu_0 H_0^2. \quad (22.30)$$

Desta maneira, as amplitudes dos vetores de uma onda plana estão associadas pela seguinte relação:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0, \quad (22.31)$$

de onde se conclui que a razão de E_0 por H_0 , no vácuo, é uma grandeza constante.

$$\left(\frac{E_0}{H_0} \right)_{\text{vácuo}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\left(\frac{1}{36\pi} \right) \cdot 10^{-9}}} = 120\pi \approx 377.$$

A dimensão dessa grandeza é ohm (Ω). Ela tem o nome de “impedância do espaço livre”.

A densidade de energia do campo das ondas eletromagnéticas é a soma da densidade de energia dos campos elétrico e magnético:

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (22.32)$$

As oscilações do vetor intensidade de campo elétrico e do vetor intensidade de campo magnético na onda plana são sincrônicas, isto é, em cada instante de tempo, entre os vetores $\vec{E}$ e $\vec{H}$ é válida relação (22.30). Vamos substituir essa relação na fórmula (22.31):

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0} E^2 = \varepsilon \varepsilon_0 E^2, \quad (22.33)$$

ou

$$w = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 E \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} H = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} E H, \quad (22.34)$$

Vemos assim que a densidade da energia é simplesmente igual à EH dividido pela velocidade de propagação da radiação v , conforme (22.11), ou seja:

$$w = \frac{EH}{v}. \quad (22.35)$$

Por outro lado, EH é o módulo do vetor de Poynting. Portanto, multiplicando-se a densidade de energia pelo módulo da velocidade de propagação da onda, obtemos o fluxo de energia, igual ao módulo do vetor de Poynting:

$$S = wv.$$

Notemos que no Sistema Internacional (SI), o vetor de Poynting, em homenagem ao físico inglês John Henry Poynting (1852-1914) é $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, enquanto no sistema CGS, o vetor de Poynting é dado por

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}).$$

Terminamos este manual com as seguintes palavras:

A relação entre os campos elétrico e magnético mostrou ser tão íntima como dois lados de uma mesma moeda. Eles são aspectos de uma mesma força: o eletromagnetismo. Um campo magnético variável vai induzir um campo elétrico variável e vice-versa. Maxwell descobriu isso. Na natureza, os fenômenos elétricos e magnéticos estão presentes desde os relâmpagos na atmosfera terrestre até as auroras boreal e austral. Mais ainda: todo o espectro de radiação, indo dos raios gamas e os raios X, passando pela luz visível, até as ondas de rádio, nada mais é do que propagação dos campos elétrico e magnético. O eletromagnetismo é a base da nossa moderna sociedade tecnológica e é também a base da cosmologia plasmática. Segundo alguns especialistas, até mesmo a formação das galáxias e as configurações dos conglomerados de galáxias estão sujeitas a fenômenos plasmáticos, quer dizer à presença de campos elétrico e magnético.

REFERÊNCIAS

- ALONSO, M.; FINN, E. J. *Física – um curso universitário*. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1977. v. 2: Campos e Ondas.
- ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthews N. O. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill: Bookman: AMGH Editora, 2013.
- DANIEL SCHAUN, B. S. *Física Geral*. Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill do Brasil: MEC, 1973.
- FRISH, S.; TIMOREVA, A. *Curso de Física Geral*. Moscou: Editorial Mir, 1984. v. 2.
- GRIFFITHS, David J. *Eletrodinâmica*. 3. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Física*. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2012. v. 3 e 4.
- HAYT JR.; William; BUCK, John A. *Eletromagnetismo*. 8. ed. Porto Alegre: Mc-Graw Hill, 2013.
- KNAUSGÅRD, Karl Ove. *A morte do pai*. Tradução: Leonardo Pinto Silva. Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 2015.
- LONGAIR, M. S. *Theoretical Concepts in Physics – An Alternative View of Theoretical Reasoning in Physics*. Cambridge: Cambridge University Press, First Edition 1984, Second Edition, 2003.
- MACHADO, Kleber Daum. *Teoria do Eletromagnetismo*. Ponta Grossa, PR: Ed. UEPG, 2004. v. 1.
- PURCELL, E. M. *Eletricidade e magnetismo*. Curso de Física Berkeley. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1980. v. 2.
- PURCELL, E. M.; MORIN, David J. *Electricity and Magnetism*. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- SADIKU, Matthew N. *Elementos de Eletromagnetismo*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- SEARS, F. W.; ZEMANSKY, M. W. *Física*. São Paulo: AddisonWesley, 2004. v. 3: Eletromagnetismo.
- SEMENOV, A. A. *Eletricidade*. Moscou: UAPPL, 1972.

- SERWAY, Raymond A.; JEWETT JR, John W. *Princípios de Física*. São Paulo: Ed. Thomson, 2006. v. 3: Eletromagnetismo.
- SAVÉLIEV, I. *Curso de Física Geral*. Moscou: Editorial Mir, 1984. v. 2.
- NUSSENZVEIG, M. *Curso de Física Básica*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2015. v. 3: Eletromagnetismo.
- TIPLER, P. A. *Física*. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2000. v. 2: Eletricidade e Magnetismo, Óptica.
- YAVORSKY, B. M.; DETLAF, A. A. *Prontuário de Física*. Moscou: Editorial Mir, 1984.
- YOUNG, Hugh; FREEDMAN, Roger. *Física III – Eletromagnetismo*. 12. ed. São Paulo: Pearson Higher Education, 2008.
- WHITTAKER, E. T. *A History of the Theories of Aether & Electricity: Two Volumes Bound As One*. New York: Dover, 1989. v. 1.

APÊNDICE A – LEIS FUNDAMENTAIS DA ELETRICIDADE E MAGNETISMO

Nome da lei física	Expressão analítica no Sistema Internacional	Equação
LEI DE COULOMB (Força de interação entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 separadas por uma distância r)	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0$	(1.8)
TEOREMA DE GAUSS-OSTROGRADSKY: a) para a distribuição discreta de cargas	$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \sum_i q_i$	(2.10)
b) para a distribuição contínua de cargas	$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \int_V \rho dV$	(2.11)
LEI DE OHM: a) para um circuito aberto	$R = \frac{V}{I} = \text{const.}$	(6.20)
b) para um circuito fechado	$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$	(6.21)
LEIS DE KIRCHHOFF: 1ª Lei, com base na lei de conservação da carga	$\sum_i I_i = 0$	(7.13)
2ª Lei, com base na lei de conservação da energia	$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k$	(7.14)
LEI DE JOULE-LENZ (Energia térmica desprendida pela corrente contínua I , ao percorrer um condutor com resistência R , durante o intervalo de tempo t)	$Q = RI^2 t$	(8.3)
LEI DE ÀMPERE (Força de interação entre duas correntes elementares $I_1 dl_1$ e $I_2 dl_2$, separadas por uma distância r , no vácuo)	$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 (d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_0))}{r^2}$ ou	(11.8)
	$d\vec{F} = I_2 (d\vec{l}_2 \times d\vec{B}).$	(11.11)
LEI DE BIOT-SAVART (Campo magnético criado no vácuo pela corrente elementar Idl num ponto arbitrário)	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$	(11.23)
LEI DA INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA DE FARADAY	$\mathcal{E}_i = - \frac{d\phi_B}{dt}$	(15.14)
CIRCULAÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO (Lei de Gauss para o magnetismo)	$\oint (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I$	(19.1)
FORÇA DE ÀMPERE: Força atuante em um fio de comprimento ℓ imerso num campo magnético constante ($\vec{B} = \text{constante}$)	$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$	(11.12)
FORÇA DE LORENTZ (Força atuante em uma carga e que se move com velocidade v no campo magnético $\vec{B}$)	$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B})$	(11.23)

APÊNDICE B – DEFINIÇÕES DAS GRANDEZAS MAIS IMPORTANTES DA ELETRICIDADE E MAGNETISMO

Nome da grandeza	Definição no Sistema SI
Campo elétrico (Intensidade do campo elétrico)	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$
Campo elétrico de uma carga pontual	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
Campo elétrico de um plano uniformemente carregado	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$
Campo elétrico de um cilindro carregado	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r}$
Campo elétrico de um dipolo ($r \gg r'$)	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{\epsilon r^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1}$
Potencial elétrico	$\varphi = \frac{\epsilon_D}{q}$
Potencial elétrico	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r}$
Potencial elétrico de um dipolo ($r \gg r'$)	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P\cos\theta}{\epsilon r^2}$
Ligação entre a intensidade do campo elétrico e o potencial elétrico	$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ ou $\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_o + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_o + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_o\right)$
Fluxo do campo elétrico	$\phi_E = \int (\vec{E}d\vec{S}) = \int E_n dS$
Deslocamento elétrico (indução elétrica)	$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$
Polarização dielétrica	$\vec{P} = -\chi\epsilon_0\vec{E}$
Conexão entre deslocamento elétrico, polarização e campo elétrico	$\vec{D} = \epsilon\vec{E} + \vec{P}$
Capacitância de um condutor	$C = \frac{q}{V}$
Capacidade de um condutor plano	$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$
Capacitância de um capacitor cilíndrico	$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$
Capacitância de um capacitor esférico	$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 Rr}{R - r}$
Capacitância resultante da associação de capacitores: a) em série b) em paralelo	$C = \sum_i C_i$ $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

Nome da grandeza	Definição no Sistema SI
Energia elétrica armazenada num capacitor	$W_E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
Densidade de energia elétrica	$W_E = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}$
Resistência resultante da associação de resistores: a) em série b) em paralelo	$R = \sum_i R_i$ $\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$
Intensidade da corrente elétrica	$I = \frac{dq}{dt}$
Densidade da corrente elétrica	$\vec{J} = e n \vec{v}$
Relação entre a intensidade e densidade da corrente elétrica	$I = \int_s (\vec{J} d\vec{S})$
Campo magnético (indução magnética)	$B = \frac{F}{I}$
Campo magnético num ponto afastado pela distância R de um fio retilíneo infinito percorrido pela corrente I	$B = \frac{\mu \mu_o}{2\pi} \frac{I}{R}$
Campo magnético dentro de um solenoide	$B = \mu \mu_o I$
Intensidade do campo magnético	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_o}$
Magnetização da substância magnética	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
Susceptibilidade magnética	$\chi_m = \mu - 1$
Ligação entre a indução $\vec{B}$ e a intensidade $\vec{H}$ do campo magnético e o vetor magnetização $\vec{M}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$
Fluxo do campo magnético	$\phi_B = \int (\vec{B} d\vec{S}) = \int B_n d\vec{S}$
Indutância de um solenoide	$L = \mu \mu_o n^2 \ell S$
Energia do campo magnético armazenada na indutância L	$W_H = \frac{LI^2}{2}$
Resistência indutiva	$R_L = \omega L$
Resistência capacitiva	$R_C = \frac{1}{\omega C}$
Frequência própria de LC-circuito	$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
Frequência de LCR-circuito (oscilações amortecidas)	$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$
Velocidade de propagação de uma onda eletromagnética num meio com permissividade dielétrica ϵ e permeabilidade magnética μ	$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \epsilon_o \mu \mu_o}}$

APÊNDICE C

I. Definições das operações.

- Gradiente do escalar φ :

$$\text{grad}\varphi = \vec{n}_o \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (3.1)$$

$\vec{n}_o$ é um vetor unitário normal à superfície $\varphi = \text{const.}$

- Fluxo do vetor $\vec{v}$ através da superfície S :

$$\phi = \int_S \vec{v} d\vec{S}, \quad (3.2)$$

- Divergência do vetor $\vec{v}$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{v} d\vec{S}}{\Delta V}. \quad (3.3)$$

- Rotacional do vetor $\vec{v}$:

$$\text{rot}_{\vec{n}} \vec{v} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_L \vec{v} d\vec{l}}{\Delta S}. \quad (3.4)$$

A fórmula (3.4) determina a projeção do vetor $\text{rot}\vec{v}$ sobre a normal à área elementar ΔS .

II. Operações no sistema de coordenadas cartesianas.

- Gradiente de φ :

$$\nabla \varphi = \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3.5)$$

- Divergência de $\vec{v}$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (3.6)$$

- Rotacional de $\vec{v}$:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

- Operador de Hamilton ∇ :

$$\nabla = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.8)$$

III. Representação das operações fundamentais.

$$\text{grad}\varphi = \nabla \varphi. \quad (3.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}. \quad (3.10)$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v}. \quad (3.11)$$

IV. Operador de Laplace ∇^2 em coordenadas cartesianas.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (3.12)$$

$$\nabla^2 \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}. \quad (3.13)$$

V. Teoremas fundamentais

- Teorema de Gauss-Ostrogradsky:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (3.14)$$

- Teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (3.15)$$

- Teorema de Green:

$$\int_V (\nabla \psi \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi) \, dV = \int_S (\psi) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS. \quad (3.16)$$

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) \, dV = \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \, dS \quad (3.17)$$

VI. Algumas identidades importantes:

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{v} \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} x \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla x \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla x \vec{b} \quad (3.20)$$

$$\nabla \cdot (\nabla x \vec{v}) = 0. \quad (3.21)$$

$$\nabla x (\nabla \varphi) = 0. \quad (3.22)$$

$$\nabla x (\nabla x \vec{v}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}. \quad (3.23)$$

$$\nabla x (\varphi \vec{v}) = \nabla (\varphi \vec{v}) + \varphi \nabla x \vec{v}. \quad (3.24)$$

$$\nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} x (\nabla x \vec{b}) + \vec{b} x (\nabla x \vec{a}). \quad (3.25)$$

APÊNDICE D – OPERAÇÕES DA ANÁLISE VETORIAL EM COORDENADAS CURVILÍNEAS

No sistema de coordenadas cartesianas, a posição do ponto $M(x_1, y_1, z_1)$ no espaço é determinada pela interseção de três planos de coordenadas (Figura 1):

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1.$$

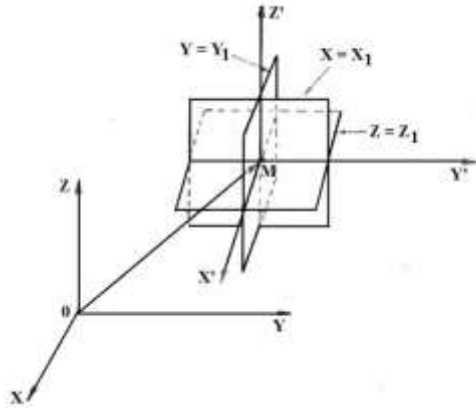


Figura 1

Através do ponto M passam três retas, cada uma das quais pertence a dois planos de coordenadas. A posição de um ponto em qualquer uma delas depende somente de uma coordenada: x, y ou z . Pode-se construir inúmeros planos de coordenadas e retas dos tipos citados, deslocando livremente o ponto M . Com o movimento do ponto M , a direção do segmento $OM = R$, denominado vetor de posição, que une o ponto M com o início das coordenadas, muda de direção.

É claro que um ponto no espaço pode ser determinado, com igual êxito, como a interseção de três superfícies quaisquer, univocamente dadas. Assim, no sistema de coordenadas cilíndricas fixa-se a intercessão da superfície de um cilindro reto e de dois planos, um dos quais passa através do seu eixo e o outro é perpendicular ao eixo (Figura 2). No sistema de coordenadas esféricas, há a interseção de um plano, da superfície de um cone e da superfície de uma esfera (Figura 3).

Estas superfícies de coordenadas, em geral, podem ser descritas pelas equações:

$$q_1(x, y, z) = \text{const}, \quad q_2(x, y, z) = \text{const}, \quad q_3(x, y, z) = \text{const}, \quad (4.1)$$

onde $q_1(x, y, z), \quad q_2(x, y, z), \quad q_3(x, y, z)$

são certas funções unívocas das coordenadas cartesianas.

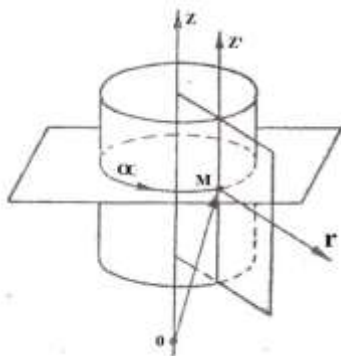


Figura 2

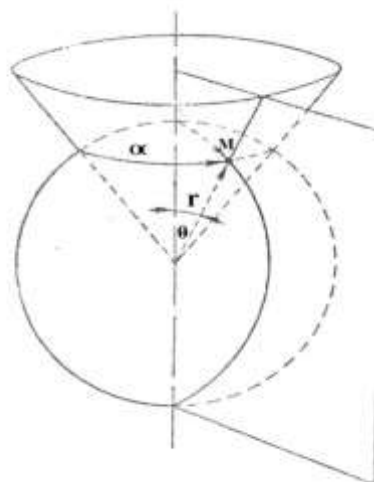


Figura 3

são certas funções unívocas das coordenadas cartesianas.

Nas linhas de interseção de duas superfícies de coordenadas (Figura 4) verificam-se, ao mesmo tempo, duas das equações de (4.1), conseqüentemente, os seus pontos são determinados apenas por uma das funções q_1, q_2, q_3 . Por isso, a linha em estudo chama-se linha de coordenada e estas funções chamam-se coordenadas curvilíneas.

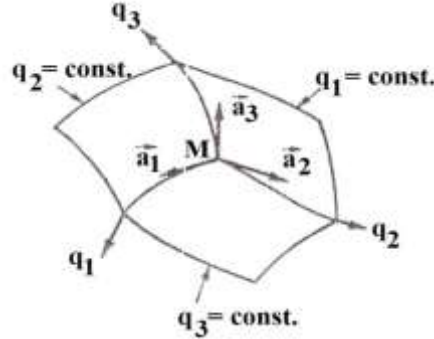


Figura 4

Para qualquer ponto M , no sistema de coordenadas curvilíneas, devemos estabelecer a representação $M(q_1, q_2, q_3)$.

Os vetores unitários tangentes às linhas de coordenadas e dirigidos para o sentido do aumento das coordenadas correspondentes são chamados de vetores da base (eles formam uma base) e são representados da seguinte maneira:

$$\vec{a}_1, \quad \vec{a}_2, \quad \vec{a}_3.$$

Vamos estudar somente os sistemas de coordenadas ortogonais, isto é; aquelas cujos vetores da base, em qualquer ponto, são mutuamente perpendiculares:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0 \quad (4.2)$$

Mas, além disso, eles são unitários, portanto, a base é ortonormal.

O deslocamento do ponto M (Figura 5) é expresso pelo incremento do seu raio vetor (vetor de posição).

Decompondo a diferencial do vetor de posição pelos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, encontramos

$$d\vec{R} = \vec{a}_1 dl_1 + \vec{a}_2 dl_2 + \vec{a}_3 dl_3, \quad (4.3)$$

onde dl_1, dl_2, dl_3 são diferenciais de comprimentos pelas correspondentes coordenadas curvilíneas.

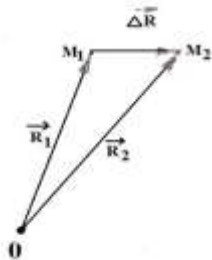


Figura 5

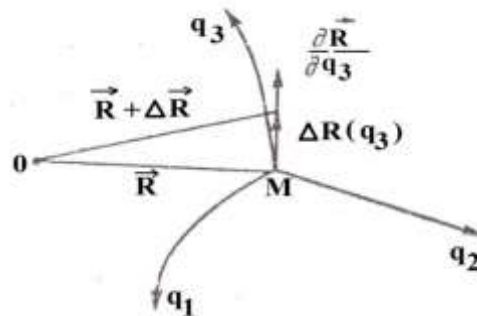


Figura 6

Por outro lado,

$$d\vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3} dq_3. \quad (4.4)$$

onde, como se vê na Figura 6, as derivadas parciais do vetor de posição pelas coordenadas são vetores paralelos às suas bases:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1} = h_1 \vec{a}_1, \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2} = h_2 \vec{a}_2, \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3} = h_3 \vec{a}_3. \quad (4.5)$$

Comparando as igualdades (4.3) e (4.4) e considerando (4.5), vemos que as diferenciais dos comprimentos das coordenadas curvilíneas diferem das diferenciais das coordenadas pelos fatores h_1, h_2, h_3 :

$$dl_1 = h_1 dq_1, \quad dl_2 = h_2 dq_2, \quad dl_3 = h_3 dq_3. \tag{4.6}$$

Estes fatores são chamados coeficientes métricos ou coeficientes de Lamé

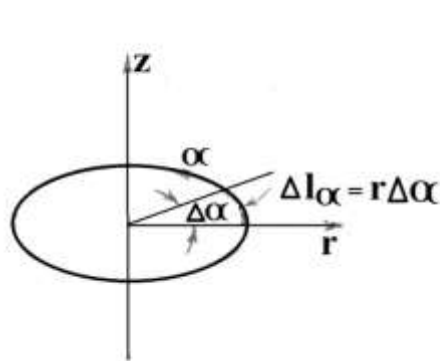


Figura 7

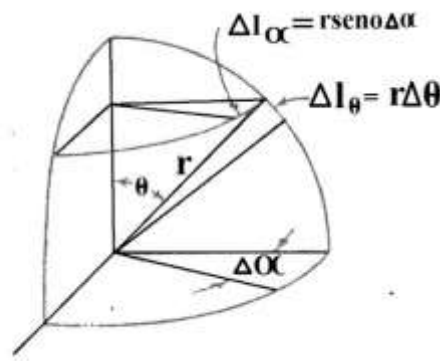


Figura 8

Geralmente, os coeficientes métricos são funções das coordenadas curvilíneas. Naqueles casos em que os incrementos de comprimento e os incrementos das coordenadas correspondentes são idênticos, os coeficientes métricos são iguais à unidade. Nos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas, estes coeficientes são determinados facilmente, a partir de concepções geométricas (Figuras 7 e 8).

Tabela 1 – Dados fundamentais dos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas

Número de coordenadas i	Sistemas de coordenadas	
	Cilíndricas	Esféricas
	$\vec{a}_i q_i h_i dl_i$	$\vec{a}_i q_i h_i dl_i$
1	$\vec{r}_0 r \mathbf{1} dr$	$\vec{r}_0 r \mathbf{1} dr$
2	$\vec{a}_0 r r d\alpha$	$\vec{\vartheta}_0 \vartheta r r d\vartheta$
3	$\vec{z}_0 z \mathbf{1} dz$	$\vec{a}_0 a r \text{sen} \vartheta r \text{sen} \vartheta d\alpha$

Vamos expressar, em coordenadas cilíndricas, as operações diferenciais da análise vetorial.

Gradiente de φ . Com base na definição de gradiente, temos:

$$\text{grad}_1 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l_1}, \quad \text{grad}_2 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l_2}, \quad \text{grad}_3 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l_3}.$$

Considerando (4.6), temos:

$$\text{grad}_1 \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{dq_1}, \quad \text{grad}_2 \varphi = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{dq_2}, \quad \text{grad}_3 \varphi = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{dq_3}.$$

Logo,

$$\text{grad} \varphi = \frac{\vec{a}_1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{dq_1} + \frac{\vec{a}_2}{h_2} \frac{\partial \varphi}{dq_2} + \frac{\vec{a}_3}{h_3} \frac{\partial \varphi}{dq_3}. \tag{4.7}$$

Em correspondência com a Tabela 1, temos:

- em coordenadas cilíndricas

$$\text{grad} \varphi = \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\vec{a}_0}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{4.8}$$

- em coordenadas esféricas

$$\text{grad}\varphi = \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\vec{\theta}_0}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\vec{\alpha}_0}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \quad (4.9)$$

Divergência de $\vec{v}$. Utilizando a definição geral (3.3) e um paralelepípedo infinitamente pequeno, formado pelas diferenciais do comprimento das coordenadas curvilíneas (Figura 9), temos:

$$\Delta V = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (4.10)$$

O fluxo do vetor $\vec{v}$ através de duas faces paralelas I e II é igual a:

$$-v_2 h_3 h_1 dq_3 dq_1 \Big|_{q_2} + v_2 h_3 h_1 dq_3 dq_1 \Big|_{q_2+dq_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 h_3 h_1) dq_1 dq_2 dq_3$$

Onde o sinal $(-)$, antes do primeiro membro, surgiu porque a normal externa à face I não coincide com a direção da coordenada q_2 . Da mesma forma, determina-se o fluxo de $\vec{v}$:

- através das faces III e IV

$$\frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 h_1 h_2) dq_1 dq_2 dq_3;$$

- através das faces V e VI

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3.$$

A soma dos resultados obtidos dividida por ΔV , em correspondência com (3.3), tem a seguinte forma:

$$\text{div}\vec{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 h_1 h_2) \right]. \quad (4.11)$$

Particularmente (veja a Tabela 1), obtemos:

- em coordenadas cilíndricas

$$\text{div}\vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad (4.12)$$

- em coordenadas esféricas

$$\text{div}\vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (4.13)$$

Operador de Laplace. As fórmulas (4.7) e (4.11) permitem escrever o operador de Laplace, que age sobre um escalar, em coordenadas curvilíneas.

$$\nabla^2 \varphi = \text{div grad} \varphi:$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (4.14)$$

Novamente, tendo em conta a Tabela 1, escrevemos:

- em coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad (4.15)$$

- em coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (4.16)$$

Rotacional de $\vec{v}$. Vamos calcular a circulação no numerador da expressão (3.4), já indicada acima, tomando como contorno L o perímetro da face lateral I do paralelepípedo representado na Figura 9:

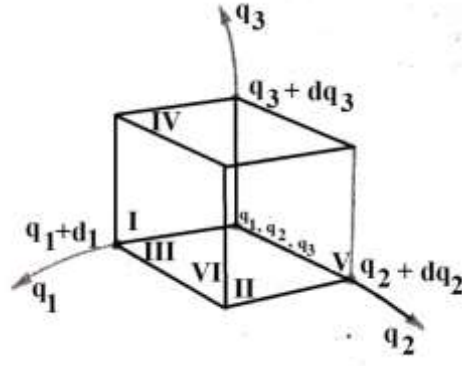


Figura 9

$$\oint_L \vec{v} d\vec{l} = -v_3 h_3 dq_3 \Big|_{q_1+dq_1} + v_3 h_3 dq_3 \Big|_{q_1} - v_1 h_1 dq_1 \Big|_{q_3} + v_1 h_1 dq_1 \Big|_{q_3+dq_3} \\ = -\frac{\partial}{\partial q_1} (v_3 h_3) dq_3 dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_1 h_1) dq_1 dq_3.$$

Aqui, são tomados, em pares, os lados opostos da face I; os sinais $(-)$ antes dos dois membros do resultado intermediário apareceram naqueles casos em que a direção do contorno durante a integração foi oposta a uma das bases.

Dividindo a circulação encontrada por $\Delta S = h_1 h_3 dq_1 dq_3$, obtemos:

$$rot_2 \vec{v} = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (v_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (v_3 h_3) \right]. \quad (4.17)$$

Da mesma maneira:

$$rot_3 \vec{v} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (v_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (v_1 h_1) \right], \quad (4.18)$$

$$rot_1 \vec{v} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (v_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (v_2 h_2) \right]. \quad (4.19)$$

Finalmente, temos:

$$rot \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{a}_1}{h_2 h_3} & \frac{\vec{a}_2}{h_3 h_1} & \frac{\vec{a}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}; \quad (4.20)$$

- em coordenadas cilíndricas:

$$rot \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{r}_0}{r} & \frac{\vec{\alpha}_0}{r} & \frac{\vec{z}_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & r v_\alpha & v_z \end{vmatrix}; \quad (4.21)$$

- em coordenadas esféricas:

$$rot \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{r}_0}{r^2 \sin \vartheta} & \frac{\vec{\alpha}_0}{r \sin \vartheta} & \frac{\vec{z}_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ v_r & r v_\alpha & r \sin \vartheta v_\alpha \end{vmatrix}. \quad (4.22)$$